Matematik B - HfE
Undervisningsvejledning
Juli 2008

Vejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens enkelte punkter samt en række paradigmatiske eksempler på undervisningsforløb. Vejledningen er et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse. Det er derfor hensigten, at den ændres forholdsvis hyppigt i takt med den faglige og den pædagogiske udvikling.
Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Denne 2. udgave indeholder især ændringer i afsnit 4 om evaluering.

Indholdsfortegnelse

0. Introduktion til vejledningen

På fagets side på [fagets side på emu'en] er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration. Læseren opfordres ligeledes til at konsultere vejledningerne til de øvrige niveauer i matematik i de gymnasiale uddannelser.

1. Identitet og formål

Læreplanens afsnit om identitet: "*Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.*"

Læreplanens afsnit om formål: "*Gennem undervisningen skal kursisterne opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement og teoridannelse. Herved skal kursisterne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige matematiske kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår. Endvidere skal de opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi.*"

2. Faglige mål og fagligt indhold

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret de faglige mål, som kursisterne skal opnå i undervisningen i matematik B-niveau. De faglige mål er grundlaget for både skriftlig og mundtlig eksamen.

De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3. I undervisningen vil disse to kategorier af fagligt stof ofte være vævet sammen. I læreplanens omtale af det supplerende stof hedder det: "*Kursisterne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i faget matematikudfylder ca. 25% af uddannelsestiden. Det skal perspektivere og uddybe kernestoffet og i det hele taget udvide den faglige horisont, så kursisterne kan leve op til alle de faglige mål. Derfor vil det supplerende stof bl.a. omfatte*" en række nærmere specificerede kategorier af emner.

I det følgende er de tre dele af hovedafsnit 2 skrevet sammen.

2.a Formler og ligninger

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne "*håndtere simple formler, herunder oversætte fra symbolholdigt sprog til naturligt sprog og omvendt, kunne redegøre for foreliggende symbolholdige beskrivelser af variabelsammenhænge og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold*".

Håndtering af variabelsammenhænge introduceres bedst gennem eksemplarisk materiale (se Eksempel 201), der leder frem til fortrolighed med matematisk notation, definitioner og begreber. Således er verbale og symbolske repræsentationer i spil fra første færd.

I arbejdet med formler, ligninger og symbolholdige udtryk vælges et eksempelmateriale, så kursisterne får indtryk af matematikkens mange anvendelser i andre fag, samt af matematikkens beskrivelseskraft i håndtering af sammenhænge mellem variable, der er knyttet til virkelige fænomener. Anvendelse af symbolholdigt sprog indebærer bl.a., at kursisterne kan redegøre for, hvorledes simple formler fremkommer, når der indføres passende betegnelser for konstanter og variable størrelser, og at de er i stand til selv at opstille formler på grundlag af en sproglig fremstilling af nogle enkle sammenhænge, der forbinder de forskellige størrelser. Endvidere at de med ord kan forklare, hvad en formel udtrykker, at de kan isolere ukendte størrelser, og at de kan sætte tal korrekt ind i formler.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable*”.

Det forventes således, at kursisterne kan håndtere problemstillinger som:

- En glasmontre anbringes som vist på figuren. Bordet udgør bunden og væggene udgør to af siderne i montren. Toppen og det resterende udskæres af en plade på 3 x 2 meter. Der skæres som vist et kvadratisk hjørne med sidelængde x bort. Argumenter for, at montrens rumfang som funktion af siden x kan skrives på formen...
- Af en kugle med radius 10 udskæres en cylinder. På figuren ses et snit gennem cylinderens akse, og dette er indlagt i et koordinatsystem. Gør rede for at cylinderens rumfang er givet ved...
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af strømstyrken I og spændingsforskellen U i en bestemt situation. Det oplyses, at U og I er proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af U, bestem en tilhørende værdi af I og omvendt.
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af den frekvens f og den bølgelængde λ, som nogle radiostationer arbejder med. Det oplyses, at f og λ er omvendt proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af f, bestem en tilhørende værdi af λ og omvendt.
- En pakke har form som en cylinder, se figuren. Cylinderens rumfang er $V = \pi \cdot r^2 \cdot l$, hvor r er cylinderens endefladeradius, og l er længden af cylinderen. Opstil en formel for omkredsen af cylinderen. På grund af krav fra postvæsenet skal der gælde, at summen af længden og omkredsen af cylinderen skal være 250 cm. Opstil en formel der udtrykker dette. Udtryk dernæst rumfanget V som funktion af r.
- Når spinat blancheres, ændrer vitaminindholdet, y, sig (målt i bestemte enheder) efter følgende forskrift: $y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t$, hvor t er tiden. Bestem y for given værdi af t og omvendt. Nitratindholdet i spinat ændrer sig samtidig og følger forskriften: $z = 20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^t$, hvor t er tiden. Bestem nitratindholdet for given værdi af vitaminindholdet.
- Isoler Q i formlen: $y^2 = Q \cdot x - Q \cdot a + k$
- Isoler n i formlen $K_n = K_0\,(1+r)^n$

- 6 forskellige størrelser er forbundet med formlen: $\ln(\frac{k_1}{k_2}) = \frac{E}{R}(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})$. Bestem værdien af den ukendte størrelse, når talværdierne for 5 af størrelserne opgives.
- Det radioaktive stof strontium 90 henfalder med 2,45% pr år. Et laboratorium indkøber 7 g af stoffet i 2004. Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver, hvor mange gram radioaktivt stof, der vil være tilbage om et givet antal år.
- For tovværk gælder, at der er en sammenhæng mellem brudstyrken og tovværkets diameter. For en bestemt type tovværk oplyses, at et tov med diameteren 20 mm har en brudstyrke på 6000 kg, samt at brudstyrken bliver 3,5 gange så stor, når tovværkets diameter bliver dobbelt så stor. Indfør passende betegnelser og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver sammenhængen mellem diameter og brudstyrke.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med brug af it-værktøjer*”.

- Arbejdet med regningsarternes hierarki og brøkregning, med parentesregler, kvadratsætninger og algebraiske omformninger tilrettelægges, så det understøtter arbejdet med den matematiske teori, med matematisering og opgaveløsning og med håndtering af formler i andre faglige sammenhænge. Det samme gælder udvidelsen af potensbegrebet og diskussion af rodbegrebet. Symbolbehandlende programmer inddrages i arbejdet med mere komplicerede udtryk.
- Ved arbejdet med formeludtryk fra andre fags problemstillinger kan kursisterne møde eksponentiel notation og har således behov for at kunne reducere potensudtryk og at kunne håndtere titalspotenser.
- Ligningsløsning med analytiske metoder omfatter brug af nulreglen, løsning af første og andengradsligninger, af to lineære ligninger med to ubekendte samt simple ligninger med de elementære funktioner. Der forudsættes en viden om sammenhængen mellem grad af polynomier og antallet af rødder, samt om faktorisering af 2. gradspolynomier. Således forventes det at kursisterne kan opskrive et eksempel på et 2. gradspolynomium, når rødderne er givet.
- En række matematiske problemer fører frem til opstilling af mere komplicerede ligninger, eksempelvis, hvor der både indgår polynomielle og transcendente udtryk. Sådanne problemer håndteres med matematiske værktøjsprogrammer. Når problemerne hidrører fra matematiske modeller vil det ofte af konteksten eller af en faglig indsigt fra pågældende område fremgå, om der må forventes én eller flere løsninger til ligningen. Ved skriftlig eksamen vil regneforskrifter og ligninger i nøgne matematikopgaver ikke være mere komplicerede, end at symbolhåndterende programmer ved korrekt anvendelse kan give den fuldstændige løsning til den pågældende ligning eller give den fuldstændige løsning på spørgsmål om rødder og nulpunkter.
- Det forventes, at kursisterne kan håndtere spørgsmål som:
  - For hvilke tal c har ligningen $f(x) = \text{c}$ netop én løsning?
  - Angiv for enhver værdi af konstanten a antallet af løsninger til ligningen ..., hvor konstanten kan indgå forskellige steder i et funktionsudtryk , fx ligningen $x^2+ax+2 = 0$.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil kursisterne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: ”for hvilke værdier af x er ... større end / mindre end en given værdi”.

I arbejdet med både komplicerede og mere simple ligninger er grafiske illustrationer vigtige til at skabe overblik og bedre forståelse af problemstillingen. Den kan i visse tilfælde være en hjælp til at løse problemet og i alle tilfælde til kontrol med løsningen.

2.b Statistik og sandsynlighedsregning
Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne: ”*give en statistisk behandling af et talmateriale og kunne formidle konklusioner i et klart sprog*”.

Statistik er videnskaben om indsamling, håndtering og fortolkning af data fra omverden. Selv på et elementært niveau skal statistik ofte forholde sig til ubearbejdede data, og det ligger i fagområdets natur, at statistiske konklusioner ikke kan opnås og præsenteres med samme grad af sikkerhed, som man ellers er vant til i den øvrige del af matematikundervisningen. Dette skal præge undervisningen, så kursisterne får et tydeligt indtryk af statistikkens særlige karakter.

Overalt præsenteres vi for oplysninger og påstande, der baserer sig på forskellige mængder og typer af data. Det kan være formuleringer som: ”Aspirin forebygger hjerteproblemer, viser en ny undersøgelse...”, eller: ”Et rundspørge, som Tv-avisen har foretaget, viser, at 2 ud af 3 danskere mener...”. Eksemplarisk materiale af denne type kan være et godt udgangspunkt for en indledende undervisning, for en diskussion af statistikkens metoder samt af spørgsmål som: Hvor sikre er de konklusioner, vi præsenteres for? Undervisningen skal overordnet set medvirke til, at kursisterne bedre bliver i stand til at forholde sig kritisk til en formidling af et givet statistisk materiale, samt at de kan stille spørgsmål til kvaliteten af og håndteringen af statistiske undersøgelser.

Emnet statistik indgår ikke i kernestoffet på hf B-niveau. Det betyder bl.a., at der ikke stilles opgaver i emnet til skriftlig eksamen. De faglige mål vedrørende statistik og sandsynlighedsregning udmøntes gennem det supplerende stof. Ifølge læreplanen skal dette omfatte ”*anvendelse af mindst to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller, indsamling og bearbejdning af data til belysning af en opstillet hypotese*”.

Statistik arbejder med metoder til at håndtere usikkerhed. Men de spørgsmål, man søger svar på, må ikke være præget af uklarhed. Tværtimod er det afgørende, at man så præcist som muligt har gjort sig klart, hvad det er, man vil måle, hvad man gerne vil vide og hvilke antagelser, man i øvrigt gør sig, før arbejdet starter.

Det første skridt ind i statistikken vil normalt være en overvejelse om, hvad troværdige data er. Hvorledes vælger man stikprøver af en population (se Eksempel 209) således, at stikprøven kan siges at være repræsentativ.
Hvordan designer man metoder til at skaffe data, således at man med statistiske metoder kan give troværdige svar på givne spørgsmål?

Gennem undervisningen skal kursisterne møde eksempler på stikprøve-situationer præget af forskellige former for systematiske fejl (bias), stikprøver, hvor der er skjulte variable på spil (konfundering), og stikprøver hvor forskellige typer blindtest anvendes. I indsamling af data til belysning af en opstillet hypotese indgår, at man kan håndtere problemstillinger som:

– I nyhedsudsendelsen på en lokal tv-station fortælles: ”Inden for de sidste timer har en af vore journalister gået rundt i Kolding og spurgt 55 tilfældige forbipasserende om holdningen til en aktuel og meget provokerende kunstudstilling. 35 af de adspurgte ønskede udstillingen lukket. Der er således et massivt pres på byrådet om at gribe ind. Nu afventer vi borgmesterens reaktion."

- Hvad er populationen, og hvad er stikprøven?
- Kommenter undersøgelsen og tv-kanalens præsentation af denne.

– Et sundhedsmagasin ønsker at undersøge, om store doser vitamintilskud forbedrer sundhedstilstanden. Bladet anmoder de af læserne, som gennem længere tid har taget store doser vitamintilskud, om at skrive ind og fortælle om positive og negative erfaringer med dette. 2754 læsere skriver ind. 93 % fortæller, at de kan spore en vis forbedring af helbredet.
  - Hvad er population, og hvad er stikprøve?
  - Kommenter undersøgelsens metode, og skriv et lille indlæg herom til en avis.
– En bestemt sygdom påvirker de røde blodlegemer og forårsager stor smerte. Et medicinsk præparat til behandling af sygdommen er udviklet, og kvaliteten af præparatet ønskes afprøvet på en population på 300 patienter, der har haft særligt mange smerteanfald.
  - Forklar, hvorfor det ville være en dårlig strategi at lade alle 300 få den nye medicin.
  - Beskriv et forsøg, der kunne give information om pågældende præparats virkning over for smerteanfald.

Kursisterne forventes at kunne anvende simple statistiske deskriptorer og simple grafiske præsentationer i en første bearbejdning af data. Det drejer sig om middeltal, median og kvartilsæt, om boxplot´s og histogrammer, der kan optræde i problemstillinger som:

– For en bestemt gruppe på 15 læger blev det undersøgt, hvor ofte de havde udført et kirurgisk indgreb, der medførte fjernelse af livmoderen. Antallet af operative indgreb var for hver af de 15 læger henholdsvis: 50 33 25 86 25 85 31 37 44 20 36 59 34 28 49
  En gruppe på 10 kvindelige læger blev tilsvarende undersøgt, og blandt disse blev der udført indgreb følgende antal gange: 7 14 25 5 33 29 18 31 10 20
  - Lav i samme koordinatsystem boxplots af hver af de to datasæt.
  - Kommenter undersøgelsen ved hjælp af den grafiske præsentation og størrelserne middeltal, median samt kvartilerne for de to datasæt.
– Givet et histogram over matematiklæreres aldersfordeling. Karakteriser dettes form. Ligger medianen til venstre for, til højre for, eller er den lig med middeltallet? Begrund svaret.
– Givet en computerudskrift af et statistisk materiale og beregninger af: maksimum, minimum, øvre og nedre kvartil, median, middelværdi og eventuelle andre karakteristiske størrelser for datasæt for forskellige sammenlignelige produkter, fx madtyper og kalorieindhold. Der ønskes en sammenligning i form af opstilling af boxplots for produkterne i samme koordinatsystem. Der ønskes en kommentar til den grafiske præsentation.

Normalt vil spørgsmål af denne karakter lettest kunne besvares ved anvendelse af et it-værktøj. Dette indebærer imidlertid også, at de resultater, man når frem til, kan variere en smule, da visse statistiske begreber er defineret forskelligt af de forskellige programmer.

Et datamateriale kan tilvejebringes på mange måder:

– kursisterne kan selv via spørgeskemaer, test i idræt eller på anden vis generere det datamateriale, holdet vil underkaste en statistisk analyse
– datamaterialet kan også komme via et samarbejde med andre fag - fx med den naturvidenskabelige faggruppe
– man kan også vælge at trække på det omfattende materiale af autentiske data, som findes i en række databanker på nettet. Med moderne it-værktøjer kan sådanne data umiddelbart trækkes ind og gøres til genstand for statistiskbehandling.

En statistisk undersøgelse af et materiale har normalt flere trin, hvoraf første trin er af mere deskriptiv karakter. Denne fase giver samtidig bedre muligheder for at kunne stille præcise spørgsmål til det givne materiale. I statistiske undersøgelser formuleres sådanne spørgsmål ofte som hypoteser. Belysning af en opstillet hypotese kan gennemføres på mange måder, men på hf vil det mest hensigtsmæssige normalt være at vælge en eksperimentel tilgang med anvendelse af statistiske it-værktøjer.

Der er i øvrigt stor frihed til at vælge, hvilke modeller man på det enkelte hold vil arbejde med. Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner, som man kan vælge i blandt, eksempelvis:

- Et forløb om opinionsmålinger (se Eksempel 209a**)**. Datamaterialet kan indsamles i spørgeskemaer eller hentes fra databaser eller opinionsmålingsinstitutter. Gennem forskellige former for simuleringer kan der arbejdes med test af hypoteser og med graden af sikkerhed, hvormed resultater præsenteres. Både randomfunktioner i lommeregnere og regneark og mere avancerede it-værktøjer kan anvendes.
- Datamateriale fra større spørgeskemaundersøgelser (se Eksempel 221**)** kan give grundlag for, at kursisterne selv opstiller hypoteser om sammenhænge, og om hvorvidt forskellige dataserier udtrykker reelle forskelle mellem køn, aldersgrupper, meningsgrupper osv. eller er udtryk for statistiske tilfældigheder. It-værktøjer kan anvendes til dette.
- Måleserier genereret fra forsøg, kursisterne selv foretager sig – (fx om følsomhed på ryg og hænder, om evnen til at smage forskel (se Eksempel 283**)**, om reaktionshastighed (se Eksempel 280**)**, træfsikkerhed osv.) – kan give anledning til en statistisk sammenligning af måleserier på grundlag af hypoteser, som kursisterne formulerer. Sammenligninger kan både ske ved eksperimenterende arbejdsformer på it-værktøjer, ved et binomialtest, ved at introducere χ^2-test eller på anden vis.
- Et forløb om Simpsons paradoks (se Eksempel 281) kan gennemføres alene i matematik eller sammen med andre fag, der også ønsker at sætte fokus på dette problem ved præsentationen af simple statistiske oplysninger. Forløbet introducerer en række grundlæggende statistiske overvejelser og kan således placeres tidligt i hele undervisningsforløbet. Matematikken bygger hovedsageligt på vejet gennemsnit.
- Man kan også vælge at gennemføre forløb med en sandsynlighedsteoretisk undersøgelse af forskellige former for spil og lotto, hvor både binomialmodeller og urnemodeller kan komme i spil.

2.c Funktioner og grafer, modellering af variabelsammenhænge

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne ”*anvende simple funktionsudtryk i modellering af givne data, kunne foretage simuleringer og fremskrivninger ud fra modellerne samt diskutere rækkevidde af sådanne modeller*”.

Kernestoffet omfatter ifølge læreplanen: ”*begrebet* $f(x)$, *karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner samt karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression på et datamateriale*”.

Modeller til beskrivelse af sammenhænge mellem variable (se Eksempel 201) omfatter både matematiske metoder til behandling af et autentisk talmateriale og modeller, hvor to eller flere variable er bundet sammen i et formeludtryk, som det fx er situationen i optimeringsopgaver. Begge tilfælde giver naturlige oplæg til introduktionen af og arbejdet med funktionsbegrebet. Opstilling og håndtering af den første type vil naturligt inddrage it-hjælpemidler. Hvor det er muligt, kan viden fra andre fag, om eventuelle årsagssammenhænge, og anvendte idealiseringer ved modelopstillingen inddrages.

De elementære funktioner, der er omtalt i læreplanens afsnit om kernestof, kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper. Eksempelvis kan tredjegradspolynomier blive præsenteret under arbejdet med optimeringsopgaver, og eksponentielt voksende og aftagende funktioner kan blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald.

Men undervisningsforløb kan også tilrettelægges således, at man først introducerer og studerer elementære funktioners karakteristiske egenskaber og siden inddrager disse i en modelleringssammenhæng. Eksempelvis kan potensfunktioner introduceres i sammenhæng med en generalisering af potensbegrebet, og funktionsklassens karakteristiske egenskaber kan blive studeret i et rent matematisk forløb, for siden at blive inddraget i modellering af vækstfænomener.

Studiet af de elementære funktioner vil ofte foregå i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modelleringsopgaver. Eksempelvis kan logaritmefunktioner blive introduceret tidligt i forløbet, således at kursisterne bliver fortrolige med funktionernes regnetekniske og skaleringsegenskaber og bliver i stand til at håndtere formler, hvor disse egenskaber anvendes. Siden kan holdet gå på opdagelse efter, hvorledes andre fag anvender logaritmefunktionerne som i pH-skalaen i kemi, i decibelskalaen i fysik, i formler for stjerners størrelsesklasser i astronomi eller i Richterskalaen i geografi. Er der overskud kan man yderligere styrke kursisternes indsigt ved at gennemføre et forløb over logaritmefunktionernes historie.

De elementære funktioners karakteristiske egenskaber beskrives med begreber som definitionsmængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema og asymptoter. Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, studeres disses betydning for det grafiske forløb. Til de karakteristiske egenskaber hører yderligere:

- sammenhængen mellem grad og antal nulpunkter for polynomier
- sammenhængen mellem diskriminant, toppunktets beliggenhed og antal nulpunkter for 2. gradspolynomier
- begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant, og sammenhængen mellem a^x og e^{kx} for eksponentielle udtryk
- regneregler for logaritmefunktioner
- sammenhængen mellem %-vækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner.

Logaritmiske koordinatsystemer er ikke et selvstændigt emne, men kursisterne skal kunne aflæse på grafer i logaritmiske koordinatsystemer, da de i mange sammenhænge og i andre fag vil kunne møde sådanne.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet endvidere "*principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering*". Funktionsudtryk anvendes både til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og variabelsammenhænge. I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer mv. Dette er omtalt under afsnittet om anvendelser af matematik.

Modeller til beskrivelse af et talmateriale inviterer til spørgsmål om prognoser, til spørgsmål som: hvad sker der med y-værdierne, når x-værdierne bliver meget store?, eller til spørgsmål der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer. Der kan ligeledes være tale om spørgsmål vedrørende beregninger af ukendte størrelser ud fra visse givne talværdier.

Det forventes således, at kursisterne kan håndtere problemstillinger som:

- Givet et datamateriale. Det oplyses, at talmaterialet kan beskrives ved en matematisk model af typen: $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot a^x$, $f(x) = b \cdot e^{kx}$ eller $f(x) = b \cdot x^a$.
  Bestem a og b, henholdsvis k og b.
  Hvornår vil befolkningstallet / koncentrationen / strålingen overstige / komme ned under en given værdi? (Den uafhængige variable behøver naturligvis ikke være tiden)
  Samt yderligere spørgsmål til modellen ud fra de karakteristiske egenskaber ved pågældende funktionsudtryk.
- I en matematisk model for befolkningstallets udvikling i New York (målt i tusinder) i årene 1790–1900 beskrives dette ved følgende udtryk: $f(t) = 36.3 \cdot 1{,}044^t$, hvor *t* angiver antal år efter 1790.
  Hvad angiver tallet 36,3?
  Hvor stor var den årlige procentvise tilvækst i befolkningstallet ifølge modellen?
  Indbyggertallet udviklede sig faktisk i årene 1790 – 2000 efter følgende opgivne datamateriale. Kommenter modellen ud fra disse oplysninger.
- Grafen for 2. gradspolynomier kan anvendes til modellering af visse linjer i bygningskonstruktioner. En bestemt tunnel har et parabelformet tværsnit med opgivne mål. Indlæg et passende koordinatsystem, og undersøg, hvilke dimensioner lastvogne maksimalt må have for at kunne køre igennem.

2.d Afledet funktion og stamfunktion, anvendelse af differential- og integralregning

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne: "*anvende differentialkvotient og stamfunktion for simple funktioner og fortolke forskellige repræsentationer af dem*".
Kernestoffet inden for emnet differentialregning omfatter ifølge læreplanen: "*definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt differentiation af* $f + g$, $f - g$ *og* $k \cdot f$ ". Endvidere: "*monotoniforhold, ekstrema og optimering og sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient*".

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem – som det ofte er tilfældet med optimeringsopgaver – eller af fysiske, kemiske, biologiske og andre love og sammenhænge. Opstillingen af sådanne modeller og besvarelsen af de tilhørende spørgsmål bygger ofte på informationer om væksthastighed og marginalbetragtninger. Håndtering af disse problemstillinger forudsætter derfor, at kursisterne er fortrolige med de emner, som kernestoffet omfatter.

Det forventes således, at kursisterne kan håndtere problemstillinger som:

- På figuren ses en kasse uden låg. Den skal konstrueres, så den er 1,6 gange så lang som bred og har et rumfang på 150 dm^3.
  - x angiver kassens bredde. Opstil et matematisk udtryk for overfladearealet som funktion af kassens bredde.
  - Bestem dimensionen, så kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

- I en model for den fremtidige udvikling af atmosfærens kuldioxid-indhold Q (målt i mia. tons) antages det, at væksthastigheden for kuldioxid-indholdet er givet ved $\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1{,}02^t$, hvor t er tiden målt i år efter ...
  - Angiv væksthastigheden i ...
  - Hvornår er væksthastigheden blevet dobbelt så stor som i ....
- I en bestemt kemisk blanding udvikler bromkoncentrationen sig som en funktion af tiden (målt i sekunder) givet ved forskriften: $f(t) = 3{,}00 - 3{,}00 \cdot e^{-0{,}0166\,t}$.
  - Hvor lang tid går der før koncentrationen er nået over...?
  - Bestem den hastighed hvormed koncentrationen ændrer sig til tiden $t = 100$.
- En funktion er bestemt ved forskriften: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$, hvor a er et tal. Bestem monotoniforhold for f. For hvilke tal a har f netop tre nulpunkter?

I mange anvendelsesopgaver vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de typer af regneforskrifter, der er behandlet i undervisningens gennemgang af de elementære funktioner og regnereglerne for differentiation. I sådanne tilfælde forventes det ifølge læreplanen, at kursisterne kan "*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer, herunder håndtering af mere komplekse formler og bestemmelse af differentialkvotient og stamfunktion for mere komplicerede funktionsudtryk.*". Det kan være opgaver som:

- Bestem den fart v (målt i km / t), der tillader flest biler pr minut at passere en bro, når antallet N af biler, som en funktion af v er givet ved: $N(v) = \frac{12v}{0{,}008v^2 + 0{,}2v + 4}$
- Indlandsisens alder, målt i år er givet ved en funktion af dybden af isen. Et bestemt sted er denne funktion givet ved regneforskriften: $f(t) = 109400 - 13660 \cdot \ln(3005 - x)$.
  - I hvilken dybde findes is, der blev dannet for 8000 år siden?
  - Bestem $f'(1250)$, og gør rede for betydningen af dette tal.
- En bestemt pludselig tilførsel af spildevand til et vandløb kan modelleres med funktionen $f(t) = 97{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}39\,t}$, hvor $f(t)$ angiver ilt-underskuddet (målt i mg / liter) til tiden t (målt i døgn) efter udslippet fandt sted.
  - Hvor stort er ilt-underskuddet 5 døgn efter udslippet?
  - På hvilket tidspunkt er ilt-underskuddet størst?
- En pige befinder sig i vandet ved position A og skal frem til position B på land, se figuren. Hun svømmer med farten 0,4 m/s og skal frem til position B på land. Hun går med farten 1,4 m/s. Gør rede for at tidsforbruget ved at følge den rute, der er angivet på figuren kan beskrives ved: $f(x) = \ldots$ Bestem den rute der ville give pigen det mindste tidsforbrug.

Kursisterne forventes at opnå en sådan fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation, så de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver inden for disse emner. Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning, samt at kende sammenhængen mellem f', monotoniforhold og lokale ekstrema.

I undervisningen kan marginalbetragtninger og begrebet væksthastighed introduceres på mange måder. Det kan fx ske i forbindelse med modelleringsopgaver. Men man kan også vælge at tilrettelægge undervisningen, så man først opnår fortrolighed med differentialregningens teori og håndværk for siden at fordybe sig i anvendelserne. Ofte vil det ske i en vekselvirkning, hvor man undervejs fordyber sig i, hvorledes man i økonomi, fysik eller andre naturvidenskabelige fag ræsonnerer ved hjælp af infinitesimale betragtninger og dermed søger at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, men det er ikke tanken at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende indebærer studiet af sammenhængen mellem f' og begreber som monotoniforhold og lokale ekstrema inddragelse af kontinuitetsbegrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling.

Arbejdet med at tilegne sig indsigt i differentialregningen foregår i en stadig vekselvirkning mellem fordybelse i teorien og udvikling af de håndværksmæssige færdigheder i anvendelsen af differentialregningen. For til fulde at forstå begreber som væksthastighed og marginalbetragtninger må man jævnligt vende tilbage til det teoretiske grundlag.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal alle hold arbejde med: ”*ræsonnement og bevisførelse inden for udvalgte emner*”. Dette kan gribes an på mange måder. Det kan være større sammenhængende forløb eller flere mindre forløb. Man kan eksempelvis vælge at:

– fordybe sig i tretrins-reglen for udledning af differentialkvotienter (se Eksempel 121) for en række af de elementære funktioner
– fordybe sig i udledning af forskellige regneregler for differentiation
– fordybe sig i beviserne for maks-min-sætningen og for monotonisætningen
– studere anvendelse af og differentiation af funktioner af to variable
– arbejde med numeriske metoder som Newton-Raphsons metode og undersøge, hvornår algoritmen virker

Integralregning introduceres på B-niveau gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet. Nogle hold kan vælge at gennemføre et sammenhængende forløb om middelværdisætningen og monotonisætningen og anvendelser af disse til bestemmelse af mængden af stamfunktioner til en given kontinuert funktion. Andre vil foretrække at lægge hovedvægten på anvendelsen af integralregningen og vil derfor for hurtigt at komme frem til anvendelserne, lægge mindre vægt på den teoretiske side af sagen.

Kernestoffet inden for dette emne omfatter ifølge læreplanen: ”*stamfunktion for de elementære funktioner, anvendelse af integralregning til arealberegning af punktmængder begrænset af grafer for ikke-negative funktioner*”.

Kursisterne forventes at opnå en sådan fortrolighed hermed, at de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver inden for disse emner. Det drejer sig både om at bestemme stamfunktioner, arealer og bestemte integraler og at kende sammenhængen mellem stamfunktion og areal. Det forventes i øvrigt, at kursisterne kan håndtere problemstillinger som:

– Bestem til en funktion f med forskriften: $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot e^{kx}$, $f(x) = b \cdot x^a$, den stamfunktion, hvis graf går gennem punktet... Bestem endvidere den stamfunktion, hvis graf har linjen med ligning: $y = ...$ som tangent.
– Bestem $\int (3x^4 - x^3 + 1)\, dx$, $\int \sqrt{x}\, dx$, $\int 2{,}3 \cdot e^{-0{,}7x}\, dx$
– Bestem $\int_0^{25} 6{,}0 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}052^t\, dt$

- Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = 2x + e^{-x}$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger $y = 0$, $y = 2x$ og $x = 4$ et område, der har et areal. Bestem dette areal.
- Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = x^2 - 6x + 10$ afgrænser sammen med linjen $y = 2$ i første kvadrant et område M, der har et areal. Bestem arealet.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal dette bl.a. omfatte: ”*matematiske modeller, herunder modellering ved hjælp af differentialkvotient*”. Blandt den store mængde af eksempler holdet kan arbejde med, kan nævnes:

- Et forløb om vækstmodeller (se Eksempel 293) kan behandle og sammenligne forskellige former for populationsvækst, fra tilfælde med konstant væksthastighed, over tilfælde med en væksthastighed, der er proportional med et bestemt funktionsudtryk eller proportional med populationens aktuelle størrelse, frem til en evt. perspektivering gennem diskussion af betydningen af konstant emigration eller af en naturlig ressourcegrænse.
- Ud fra en eksperimentel måling af, hvorledes temperaturen ændrer sig (se Eksempel 205) i en kop kaffe eller en varm jernklods, der ligger til afkøling, kan kursisterne opnå en vis indsigt i Newtons afkølingslov og i den differentialligning, der beskriver fænomenet.
- Ud fra en opmåling af, hvorledes en solsikke vokser som funktion af antal dage, der er gået siden frøet blev sået, kan kursisterne opnå en vis indsigt i logistisk vækst og i den differentialligning, der beskriver fænomenet.

2.e Geometri

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne ”*redegøre for foreliggende geometriske modeller og håndtere geometriske problemstillinger*”. Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter*”. Det forudsættes endvidere, at kursisternes viden om den Pythagoræiske læresætning fastholdes. Beregninger kan ligeledes foretages i dynamiske geometriprogrammer.

I grundskolen har kursisterne arbejdet med geometrisk modellering og løsning af problemer med geometrisk indhold ved tegning og måling, konstruktion og simple beregninger. Men kursisterne starter ofte på hf med meget forskellige forudsætninger. Et fælles grundlag for holdets arbejde med geometri kan tilvejebringes gennem forskellige kortere undervisningsforløb. Det kan være elementærgeometriske forløb, der illustrerer opbygningen af en matematisk teori, og hvor fokus er på det matematiske ræsonnement. Det kan også være eksperimentelle forløb, hvor dynamiske geometriprogrammer inddrages. Sætningerne om vinkelsum i trekanter og i n-kanter kan lægge op til induktive metoder, mens beregninger af arealer i kvadrater, rektangler, trekanter, parallelogrammer, trapezer mv. kan lægge op til deduktive metoder.

Uanset hvilke former, der vælges, forventes det, at kursisterne opnår kendskab til de grundlæggende begreber og betegnelser fra den klassiske geometri, således at de kan håndtere følgende ved en skriftlig eksamen:

- Figuren viser en trekant ABC, hvor $\angle C = 38°$, $h_a = 35$, $m_a = 37$. Fodpunktet for h_a og m_a kaldes henholdsvis H og M, og det oplyses, at $\angle AMC$ er spids. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekant ABC.
- En trekant har sidelængder... Bestem trekantens vinkler. Bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_A .

Arbejdet med geometriske og trigonometriske problemer vil ofte tage udgangspunkt i givne tegninger. Men kursisternes kompetence til at behandle sådanne problemer kan yderligere styrkes ved at opøve evnen til at tegne modeller, der kan anvendes som grundlag for beregninger, ud fra et givet forlæg. Udgangspunktet kan være problemer som højdemåling af bygninger eller afstandsmåling i et landskab, og forlægget kan være tegninger, fotografier eller egne opmålinger. I nogle forløb kan det være naturligt at inddrage klip fra matematikhistoriske tekster. I andre kan det eksempelvis være moderne tekster, der fx vedrører konstruktion af bygninger.

2.f Matematisk ræsonnement og teori

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne "*gennemføre simple matematiske ræsonnementer og beviser*". Der er stor frihed til på det enkelte hold selv at vælge inden for hvilke områder, man går i dybden med den matematiske teori. Ifølge læreplanen skal det supplerende stof omfatte: "*ræsonnement og bevisførelse inden for udvalgte emner*". Det vil ofte være emner hentet fra kernestoffet.

Det er vigtigt, at undervisningen tilrettelægges, så kursisterne møder den matematiske teori og selv arbejder med forskellige elementer af matematisk ræsonnement (se Eksempel 134) gennem hele forløbet og inden for alle områder af undervisningen. Kun derved kan kursisterne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem "hvad man ved", "hvad man antager" og "hvad man ønsker at vide". Det gælder uanset om emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. I skriftlige rapporter og mundtlig fremstilling skal de kunne fremlægge denne indsigt på en sådan måde, at det matematiske argument og den matematiske tankegang fremstår klart. Det kan eksempelvis dreje sig om:

- en rapport om trigonometri og landmåling
- en rapport over et forløb om udledning af forskellige differentialkvotienter
- en fremlæggelse af en statistisk analyse af forskellige stikprøver af en population.

Uanset hvilke emner, der arbejdes med på det enkelte hold, forventes det, at kursisterne når frem til at kunne skelne mellem forudsætninger, definitioner og sætninger, samt at de kan gennemføre nogle centrale beviser og et sammenhængende matematisk ræsonnement inden for forskellige af fagets områder:

- I arbejdet med opstilling og omformning af formeludtryk, ved løsning af ligninger og ved introduktion af nye matematiske emner kan der sættes fokus på betydningen af at have og betjene sig af et præcist matematisk sprog, som er internationalt, og som alle fagets udøvere kender. Der kan arbejdes med et eksempelmateriale præget af mangler i den matematiske præcision. Eller der kan søges på nettet efter matematiske fremstillinger fra alverdens lande.
- Et eksempelmateriale med både korrekte og forkerte metoder til løsning af ligninger – herunder såkaldt falske løsninger på CAS-værktøjer – kan fremme en sådan diskussion og afklaring om karakteren af de forskellige regler, der anvendes – hvad er definitioner, hvad er aksiomer, og hvad er små "sætninger"? Et element i matematisk modenhed er også at kunne bedømme gyldigheden af svar og løsninger.
- Udnyttelse af regressionsfaciliteter i matematisk modellering (se Eksempel 201) kan både give anledning til, at der – evt. i et samarbejde med andre fag - sættes fokus på: "hvad man ved", "hvad man antager" og "hvad man ønsker at vide" samt på forskellen mellem en matematisk sammenhæng mellem variable og en årsagssammenhæng. Men det kan også give anledning til et lille forløb om, hvilket ræsonnement der kan ligge bag begrebet 'bedste rette linje'.

- I den indledende geometri er der rige muligheder for at kursisterne selv arbejder med at formulere enkle sætninger, gennemfører små beviser og herved opnår indblik i matematikkens væsen.
- Udledning af de trigonometriske relationer for vilkårlige trekanter eller af betingelserne for løsning af 2. grads-ligningen og af løsningsformlen, når der er reelle løsninger, giver muligheder for at sætte fokus på, hvorledes et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af implikationer.
- Udledning af udvalgte differentialkvotienter for de elementære funktioner indebærer også, at man vælger, om man skal tage visse formler (for differentiation af produkt, henholdsvis af sammensat funktion) for givet, eller om beviset for disse skal indgå i forløbet.
- Megen matematisk modellering vil have nytte af at tage udgangspunkt i kategorierne ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide”. Identifikation af variable, viden om relationer mellem disse, samt antagelser om årsagssammenhænge vil ofte bygge på en faglig viden fra andre fag. Men matematiske metoder er afgørende for at oversætte problemet til ét, som man kan håndtere. Det kan dreje sig om fysiske eller kemiske love, ræsonnement om arvelighed og andre genetiske spørgsmål på grundlag af Bayes sætning eller andet.

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori, og først tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor netop sætningens forudsætninger er nødvendige.

2.g Anvendelser af matematik – matematik i samspil med andre fag

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne ”*formidle viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder*”.

At formidle viden om matematikanvendelse betyder, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. Samtidig sættes der fokus på evnen til at kommunikere om matematik og matematikkens anvendelse.

Gennem et samarbejde med eller ved at inddrage viden fra andre fag kan man overveje, hvilke forenklinger, idealiseringer og abstraktioner der er acceptable i den givne situation, og som danner grundlag for en matematisering. Ved at generalisere disse metoder kan der vindes indsigt i muligheder og begrænsninger ved matematisk modellering. Men man kan ikke forvente, at kursisterne opnår en egentlig rutine i matematisk modellering af komplekse problemstillinger.

I afsnit 3.4 vil matematikanvendelse blive eksemplificeret.

2.h Anvendelse af it

Ifølge læreplanen skal kursisterne kunne ”*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer, herunder håndtering af mere komplekse formler og bestemmelse af differentialkvotient og stamfunktion for mere komplicerede funktionsudtryk*”.

I de foregående dele af vejledningens afsnit om faglige mål og fagligt indhold er dette behandlet i tilknytning til de enkelte faglige områder.

I næste afsnit om tilrettelæggelse vil anvendelse af it blive behandlet i tilknytning til selve undervisningen.

I afsnit 4.2 om prøveformer er der endelig en række kommentarer om anvendelse af it ved besvarelser af de skriftlige eksamensopgaver.

3. Tilrettelæggelse

Ifølge læreplanens afsnit 3.1 skal "*Undervisningen tilrettelægges med henblik på, at den enkelte kursist når de faglige mål.*" For hf-kursister på toårigt hf starter dette med introduktionskurset, som er omtalt senere i dette afsnit om tilrettelæggelse. Endvidere spiller værkstedsundervisningen en særlig rolle på hf. Også dette er omtalt senere i et særskilt afsnit.

Videre hedder det i læreplanens afsnit 3.1: "*Kursisternes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver skal stå i centrum for undervisningen.*".

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Kursisterne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, således at de kan aktivere det i relevante situationer, og det sker bedst ved, at kursisterne aktivt og selvstændigt arbejder med faget. Derfor kræver matematiklæring bl.a., at kursisterne går i dialog med hinanden og med læreren for herigennem at udvikle deres begrebsbeherskelse.

Kursisternes selvstændige arbejde med faget vedrører alle sider af undervisningens tilrettelæggelse. Det vedrører tilegnelsen af matematiske begreber gennem en vekselvirkning mellem eksperimentelt anlagte forløb og deduktive forløb. Det vedrører arbejdsformer som gruppearbejde og den enkelte kursists selvstændige arbejde med matematiske tekster. Det vedrører projektforløb og udformning af skriftlige besvarelser og rapporter. Og uanset hvor man er i undervisningen, skal det altid overvejes, hvorledes it kan udnyttes til at understøtte såvel færdighedsindlæring som den matematiske begrebsdannelse.

3.a Eksperimenterende tilgang

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: "*Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, opgaver og problemstillinger skal kursisternes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så generaliseringer udspringer af konkrete eksempler.*"

Forståelse af matematiske begreber har både et intuitivt og et formelt grundlag, og oftest er den intuitive forståelse en forudsætning for den formelle. Særligt den intuitive forståelse understøttes ved induktive undervisningsforløb. Den eksperimenterende tilgang og induktive metode i undervisningen skal stimulere kursisterne til selv at prøve sig frem og forsøge forskellige løsningsmetoder over for et givet problem. At prøve sig frem kan give et bedre overblik og dermed give ideer til en løsningsstrategi ved arbejdet med et matematisk problem. Den eksperimenterende og induktive tilgang kan således også bidrage til at udvikle kursisternes problemløsningsevne:

- I geometri kan kursisterne selv argumentere for formler for vinkelsummer i en n-kant på basis af sætningen om vinkelsummen i en trekant, eller de kan selv finde formler for arealer af parallelogrammer, trapezer mv.
- Undersøgelse af karakteristiske egenskaber ved elementære funktioner eller simple kombinationer af disse kan lægges ud til kursisternes eksperimenter med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- I differentialregningen kan man i fællesskab udlede differentialkvotienterne for eksempelvis x^2 og $\sqrt{x}$, og dernæst lade kursisterne arbejde med at udnytte tretrins-reglen til at udlede differentialkvotienter (se Eksempel 121) af udtryk som $\left(f(x)\right)^2$ og $\sqrt{f(x)}$, hvor $f(x)$ er en differentiabel funktion.
- Et forløb om tangentbestemmelse (se Eksempel 124) kan tilrettelægges så eleverne eksperimenterer sig frem med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- Et forløb om grafkending (se Eksempel 129) kan tilrettelægges så eleverne eksperimenterer sig frem med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer og opnår indsigt i karakteristiske træk ved grafer for elementære funktioner..
- I statistik vil mange forløb indeholde eksperimentelle elementer eksempelvis forløb med undersøgelse af et stort datamateriale på basis af stikprøver.

CAS-værktøjer er meget velegnede til induktive forløb. I læreplanen står: ”*CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.”* Med CAS-værktøjer har man helt nye muligheder, idet eksperimentel tilgang nu er forholdsvist ukompliceret, da værktøjet kan udføre besværlige udregninger og tegne komplicerede diagrammer næsten øjeblikkeligt. På denne måde kan undervisningen tilrettelægges, så kursisterne gennem en række forsøg erfarer sammenhænge, dernæst formulerer hypoteser og formodninger for endelig i slutningen af forløbet at bevise disse regler. Dette er yderligere kommenteret i it-afsnittet.

3.b Den matematiske teori

”*Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så kursisterne får en klar forståelse af bevisets betydning i matematisk teori.*”, står der i læreplanen. Det er vigtigt, at kursisterne oplever matematik som et fag, hvor eksperimentelle tilgange er meget nyttige, men at matematik ikke er et eksperimentelt fag som de naturvidenskabelige fag. Den matematiske teori er bygget anderledes op end i andre fag, og kursisterne skal præsenteres for sådanne elementer i faget, at det åbner for en indsigt i bevisets betydning. Dette kan være både være ganske korte forløb som omtalt i afsnit 2.f under overskriften **Matematisk ræsonnement og teori** . Men det kan også have karakter af et lidt større forløb, hvor man eksempelvis fordyber sig i beviserne for:

- differentiationsregler, der rækker ud over kernestoffet
- maks-min-sætningen, middelværdisætningen eller monotonisætningen inden for differentialregningen
- integrationsmetoder, der rækker ud over kernestoffet.
- sammenhængen mellem areal og stamfunktion for positive og monotone funktioner
- asymptotiske forhold og størrelsesforhold for bestemte klasser af funktioner
- simple rækker og deres konvergens.

3.c Den mundtlige dimension

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: ”*Den enkelte kursist skal i undervisningen aktivt bruge det matematiske sprog til at formidle sin viden.*”
I undervisningstilrettelæggelsen inddrages både overvejelser om variation i undervisningsmetoder og progression i forhold til selvstændighed, omfang og præcision i brugen af det matematiske sprog. Arbejdsformer som lærergennemgang og klassediskussioner, gruppearbejde, par-arbejde, store og små kursistforedrag kan alle give gode rammer for arbejdet med mundtligheden. Besøg med foredrag på en virksomhed, der anvender matematik, eller på en videregående uddannelsesinstitution kan give kursisterne indtryk af de krav, der må stilles, når der tales om matematik og med brug af matematikkens sprog. Samtidig kan det bidrage til at sætte fokus på nødvendigheden i at opøve evnen til at koncentrere sig om en mundtlig fremstilling og dialog i længere tid af gangen, og give dem et glimt af de spændende og udfordrende problemstillinger, faget arbejder med på dét niveau.

Kravene til præcision og forventningerne til fyldigheden af den enkelte kursists bidrag til en klassediskussion ændrer sig gennem hele undervisningsforløbet. Denne udvikling kan stimuleres ved at tilrettelægge forløb, hvor kursisterne selv bruger det matematiske sprog i fremlæggelse og diskussion i par eller grupper.

3.d Gruppearbejde

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”*En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på, at kursisterne udvikler deres matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.*”

Ved gruppearbejde arbejder kursisterne selvstændigt med faget under lærerens vejledning. Gruppearbejde kan være kortere og forholdsvist stramt styrede forløb, hvor alle kursister arbejder med samme forlæg. Det kan fx være opgaver/øvelser, gangen i et bevis, arbejdsspørgsmål til et afsnit i lærebogen eller til andre tekster med matematisk indhold eller arbejde med begrebskort. I gruppearbejdet skal man være opmærksom på, at ikke alle grupper arbejder på lige højt fagligt niveau og ikke når lige langt. Lærerens må tilpasse sin vejledning af hver gruppe herefter. Det vil ofte være mindre hensigtsmæssigt at afslutte et kortere gruppearbejde med, at læreren gennemgår det, grupperne lige har arbejdet med; men eventuelt kan en eller flere grupper fremlægge nogle af deres resultater.

I klassediskussionen er kursisterne med til at sætte dagsordenen, og læreren går her i dialog med kursisterne. Her er det vigtigt, at man som lærer ikke konstant retter forkerte kursistudsagn og selv siger det korrekte, men tværtimod hele tiden arbejder bevidst med kursisternes anvendelse af sprogbrugen og diskuterer forkerte opfattelser af begreberne. Denne form kan være god til fx at diskutere løsning af en opgave, hvor de forskellige kursistforslag diskuteres i klassen.

Den traditionelle lærergennemgang af matematisk stof (forelæsningen) har også sine fortrin, idet mange kursister får stoffet gennemgået samtidigt. Men den har samtidig den ulempe, at alle kursister skal følge med i samme tempo og på sammen niveau. Derfor vil denne form egne sig bedst til tidsmæssigt kortere forløb. Kursisterne ser og hører, hvordan en fagmand tænker på og formulerer sig om en matematisk problemstilling, og får herved indtryk af korrekt matematisk sprogbrug, hvor læreren optræder som ”rollemodel”.

I afsnittet om værkstedsundervisning er der også kommentarer til arbejdet med den mundtlige dimension

3.e Arbejdet med matematiske tekster
I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: "*Kursistens selvstændige tilegnelse og formidling af forelagte matematiske tekster indgår i arbejdet med den mundtlige dimension.*"
Udvikling af kursisternes færdigheder i at læse en forelagt matematisk tekst selvstændigt har betydning for kursistens studiefærdighed såvel på de videregående uddannelser som i matematikundervisning på hf. At fokusere på evnen til at læse en matematisk tekst selvstændigt betyder, at selve det at læse en matematisk tekst får en større plads i undervisningen. Nødvendigheden af at kunne læse en matematisk tekst starter allerede ved løsningen af en lidt mere kompliceret opgave, noget som forudsætter, at man kan forstå den koncentrerede fremstilling og fx identificere variable og sammenhænge mellem dem samt forstå, hvad der spørges om. Det er ikke noget kursisten kan i forvejen, og derfor skal det trænes:

- Ovenstående figur viser den forventede udvikling i flytrafikken over Europa indtil 2020. Ifølge denne figur vil antallet af flyvninger vokse lineært i perioden 2000-2020. Bestem en regneforskrift for den funktion f, der beskriver antallet af flyvninger som funktion af antal år efter 2000. Bestem antal flyvninger i... Bestem i hvilket år antallet af flyvninger vil overstige...
- Figuren viser et drivhus. Drivhuset står direkte på jorden, og taget samt endefladerne er lavet af plastik Drivhuset har form som en halvcylinder med radius *x* meter og længde *l* meter. I det følgende betragtes drivhuse med et bestemt overfladeareal, hvor sammenhængen mellem længden *l* og radius *x* er givet ved: $l = \frac{38}{x} - x$. Gør rede for, at for sådanne drivhuse er rumfanget $V(x)$ givet ved $V(x) = 19\pi x - \frac{\pi}{2}x^3$, hvor $V(x)$ er målt i m^3.
- På et hus beskytter tagudhæng mure og vinduer mod sol og regn, se figur 1. Figur 2 viser en skitse af tagudhæng og mur på et hus. Tagudhænget har en længde *l* på 50 cm, og vinklen *v* som tagudhænget danner med lodret, er $60°$. Når solen skinner kaster tagudhænget en skygge af længde *s* på muren. Solhøjden *w* er den vinkel som solens stråler danner med vandret. Beregn skyggens længde *s*, når solhøjden er...

Men også det at læse en gennemgået matematisk tekst (se Eksempel 161) eller en ny tekst til næste gang er noget, kursisten skal lære. Det er ikke indlysende for alle kursister, at man ved læsning af matematik må arbejde med papir og blyant, at man må stille spørgsmål til teksten, at man må tage notater, at man må udføre alle mellemregninger. At vejlede kursisten i at læse en matematisk tekst kan gribes an på mange måder. Fx kan man give kursisten en opskrift på, hvordan man læser en matematisk tekst, og man kan prøve at tydeliggøre, hvilke ligheder og forskelle der er mellem at læse en matematisk tekst og tekster i andre fag. Man kan udarbejde arbejdsspørgsmål til en tekst, som kursisterne har for. Man kan bede kursisterne aflevere deres studienotater fra hjemmearbejdet med teksten.

3.f Projektforløb og emneforløb
I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: "*En betydelig del af undervisningen inden for kernestoffet og det supplerende stof tilrettelægges som projekt- eller emneforløb. For hvert større forløb formuleres*

faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og kursisterne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater."

Et projektforløb er ikke en entydig størrelse, men kan defineres på flere måder, som hver for sig har fordele og ulemper i forhold til en given undervisningssituation. Den enkelte lærer må derfor i den givne situation, på det givne trin i undervisningen og ud fra stoffets karakter samt sit kendskab til det pågældende hold nøje overveje, hvilken form der er mest hensigtsmæssig. Men fælles for alle projektforløb er, at det starter med en problemformulering, at kursisterne arbejder selvstændigt undervejs, og at det slutter med et produkt.

En problemformulering er oftest formuleret som en afgrænset faglig problemstilling, der behandles og besvares gennem projektarbejdet. Problemformuleringen kan udarbejdes af kursisterne selv, enkeltvis eller i grupper. Men dette kan være en tidskrævende proces, og valg af denne form er normalt forbundet med, at det er et bevidst mål for undervisningsforløbet, at kursisterne skal lære at formulere egne spørgsmål til et forelagt materiale, som eksempelvis i visse statistiske forløb.

I de fleste tilfælde vil det være en fordel, at læreren på forhånd har udarbejdet problemformuleringen/-erne. Enten kan alle grupper arbejde med samme problemformulering eller læreren kan udarbejde flere forskellige, som kursisterne så gruppevis vælger mellem.

Et selvstændigt kursistarbejde med projektet kræver god forberedelse og faste aftaler. Eksempelvis aftaler om arbejdsformen i grupperne, om hvilke opgaver eller roller det enkelte gruppemedlem har, om dette går på skift, om hvordan man giver lektier for og hvordan dette registreres, om råd og vink fra lærere, og om hvornår læreren tilkaldes for at yde direkte hjælp. Under projektarbejdet kan der opstå ønske om at ændre problemformuleringen. Det kan være en god ide, at lærere og kursister på forhånd aftaler regler for, hvornår og hvordan en problemformulering kan ændres.

Emneforløb adskiller sig fra projektarbejde ved, at der ikke nødvendigvis foreligger en problemformulering, at kursisterne ikke nødvendigvis arbejder selvstændigt i grupper i hele forløbet, og at der ikke nødvendigvis er et produktkrav. Undervisningen i et emneforløb kan veksle mellem klasseundervisning, forelæsning, kursistforedrag, kortere eller længerevarende gruppearbejder, kursistfremlæggelse af delresultater o.a.

Ifølge læreplanen skal "*undervisningen tilrettelægges med progression i arbejdsmetoder og fagligt indhold"*. Ligesom det faglige indhold i undervisningen skal præsenteres med progression, skal arbejdsformerne også introduceres med progression for kursisterne. Arbejdsmetoder skal således medtænkes i den pædagogiske tilrettelæggelse.
Det er ikke entydigt, at bestemte arbejdsformer matcher eksakte faglige niveauer, men arbejdsmetoden bør generelt understøtte kursistens udvikling gennem forløbet som led i udvikling af studiekompetencen.
Forskellige pædagogiske metoder kan derfor anvendes forskelligt afhængigt af niveau og forløb. Mundtlig fremlæggelse om små, meget afgrænsede matematiske emner kan være en god træning i begyndelsen af forløbet, fx kursistgennemgang af en opgave på tavlen, mens større fremlæggelser vil kunne anvendes senere i forløbet, fx en fremlæggelse af regneregler for differentiable funktioner.
Til hver tid i et forløb kan kursisters selvstændige arbejde være et nyttigt redskab til læring, men der kan være stor forskel på, hvordan et selvstændigt arbejde tilrettelægges. Hvor kursisterne i selv-

stændigt arbejde i begyndelsen af et forløb bør have meget støtte både fagligt og med hensyn til arbejdsform, kan kursisternes selvstændige arbejde senere i forløbet i højere grad være selvhjulpet. Særligt ved meget selvstændigt gruppearbejde samt projekt- og emneforløb må man være indstillet på, at disse arbejdsformer kræver en del træning.
Måden at læse lektier bør også udvikles gennem forløbet.

Alle projekt- og emneforløb afsluttes med et produkt, der kan evalueres. Produktet kan være en rapport, et foredrag med tilhørende disposition, en synopsis, et debatindlæg til en avis (se Eksempel 302), en kommenteret oversigt eller mindmap over strukturen i den behandlede matematik, et passende bredt udvalg af opgavetyper fra det behandlede emne eller andet. Læreren klargør fra starten kravene til produktet og aftaler på forhånd med kursisterne hvorledes projektet evalueres.

3.g Matematikrapporter

Ifølge læreplanens afsnit 3.2 skal ”*en række af projekt- og emneforløbene afrundes med, at kursisterne udarbejder en rapport.*”
En sådan matematikrapport kan være produktet fra et gruppeprojekt. Arbejdet kan dog også organiseres, så kursisterne arbejder individuelt med en rapportopgave og afleverer hver sin besvarelse, eller der kan være tale om en kombination af gruppearbejde og individuelt arbejde. Normalt vil en del af arbejdet ligge i undervisningstiden og en del være hjemmearbejde for kursisterne.

Der er talrige muligheder for rapporters opbygning og faglige indhold (se Eksempel 153). Kravene til en rapport kan fx omfatte et eller flere af følgende elementer:

- en oversigt over de vigtigste begreber, metoder og resultater i det pågældende emne
- en gennemgang af et vigtigt bevis (eller andet ræsonnement) med en detaljeret forklaring
- en eller flere større anvendelsesopgaver med autentisk datamateriale, evt. med inddragelse af et it-værktøj
- en række små opgaver, der tilsammen fører frem til et større resultat
- formidling til en given målgruppe.

De faglige mål, som et rapportarbejde skal tilgodese, kan være knyttet til kernestoffet, til det supplerende stof eller til en bestemt matematikkompetence. Nogle få eksempler:

- Geometri (eventuelt på baggrund af konkret opmåling, foretaget af kursisterne)
- Statistik (med statistisk behandling og fortolkning af et autentisk datamateriale (se Eksempel 221)
- Funktionsbegrebet og dets repræsentationsformer (en abstrakt overbygning til C-niveauets konkrete anvendelseseksempler)
- Differentialregning (begreber, metoder, anvendelser) (se Eksempel 153)
- Modeller og modellering
- Velfærdsamfundet og befolkningsudviklingen i Danmark (se Eksempel 224)
- Matematiske beviser (se Eksempel 134).

Kursisterne har behov for hjælp og vejledning under udarbejdelsen af rapporten. Erfaringen viser, at kursisterne får betydeligt større udbytte af kommentarer og forbedringsforslag undervejs i processen end af rettelser til den færdige rapport. Ikke mindst ved en opgave, hvor formidlingen er i fokus, kan det være en god idé at lade udarbejdelsen af rapporten foregå i to trin: Først foretager kursisterne den rent matematiske behandling af rapportopgavens problemstillinger og afleverer en foreløbig besvarelse til læreren. På baggrund af lærerens rettelser og kommentarer udarbejdes den endelige rapport. I denne fase koncentreres arbejdet om de formidlingsmæssige problemer.

Rapportarbejdet giver gode muligheder for undervisningsdifferentiering. Det er vigtigt ved formuleringen af en rapportopgave at sørge for passende udfordringer til både fagligt svage og fagligt stærke kursister. Eksempelvis kan opgaveformuleringen bestå af en del, som alle skal besvare, og af en del med valgfrie problemstillinger af forskellig sværhedsgrad, hvor hver kursist (eller hver gruppe) vælger en eller flere efter lærerens rådgivning.

Specielt kan der på B-niveau på hf enkeltfag være behov for differentierede krav og muligheder i rapportarbejdet. Kursister, hvis C-niveau-kursus i matematik ligger flere år tilbage og som måske ikke har eller ikke har gemt matematikrapporter herfra, kan have gavn af i et vist omfang at inddrage problemstillinger fra C-niveau i deres rapporter. Det kan hjælpe dem med at få genopfrisket de begreber og metoder, som de tidligere beherskede, og i højere grad få det samlede stof, der hører til B-niveau, til at fremstå som en helhed. Også til den mundtlige eksamen vil det være en fordel for dem at have rapporter med tilknytning til en større del af de faglige mål. Kursister, der for nylig har afsluttet C-niveauet og har gemt deres rapporter herfra, vil typisk ikke have et sådant behov og kan med fordel koncentrere sig helt om de nye faglige emner.

Læreren retter og kommenterer rapporterne. Også i de tilfælde, hvor der er tale om en grupperapport, skal hver kursist have sit eget eksemplar af både rapport og rettelser og kommentarer. En af grundene hertil er, at rapportens emne og problemstillinger skal kunne inddrages til den mundtlige eksamen.

3.h Skriftligt arbejde i øvrigt

En forudsætning for et selvstændigt arbejde med faglige problemstillinger på et vist niveau er, "*at grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen*", som det hedder i læreplanens afsnit 3.1. Det gælder både i den mundtlige og den skriftlige dimension.
I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: "*I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde.*"

Den skriftlige dimension er et centralt element i matematik, da det både er et indlæringsredskab og et evalueringsinstrument. Det er en del af undervisningen, at kursisterne vejledes med hensyn til de krav til skriftlige besvarelser, som fremgår af læreplanens bedømmelseskriterier og vejledningens afsnit 4 om bedømmelse af de skriftlige opgaver.

Arbejdet med de traditionelle matematikopgaver har til formål at opøve kursisterne i problemløsning, fra det simple til det mere komplicerede. Her kan arbejdet varieres. Ofte lærer man et fag godt at kende, hvis man er god til at stille spørgsmål inden for faget. Man kunne benytte denne ide ved træningsopgaver, idet man beder kursisterne om at udarbejde nogle opgavetyper, som de selvfølgelig skal kunne løse selv. Andre kursister i klassen kunne så evt. løse dem. Man kan endvidere lade kursisterne arbejde med at rette opgaver med bestemte fejl, som læreren har udarbejdet.

Kursisternes udbytte af rettelserne vil normalt stige betydeligt, hvis slutretningen ikke står alene, men er kombineret med rettelser og kommentarer givet i løbet af skriveprocessen. En elektronisk besvarelse kan give gode muligheder for videre bearbejdning og redigering, og derfor være velegnet til at *kvalificere kursisternes skriftlige* arbejde. Man kan fx lade dele af et opgavesæt være elektronisk med genaflevering for øje eller man kan opdele arbejde med et opgavesæt i forskellige faser, hvor enkeltfaser er elektroniske og genstand for kritik fra lærer eller fra andre kursister.

3.i It

I læreplanen står der i afsnit 3.3 om it: ”*Undervisningen tilrettelægges, så lommeregnere, it og matematikprogrammer indgår som væsentlige hjælpemidler i kursisternes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning.*”

Ved it i matematikundervisningen forstås håndholdt teknologi (CAS-værktøj, geometriværktøj, lommeregnere) samt computerbaserede programmer (CAS-værktøj, geometriværktøj, statistikprogrammer, regneark, Internet og webapplets etc.). Det er et krav, at alle kursister skal have adgang til et CAS-værktøj. På den enkelte skole/det enkelte kursus bør man afgøre, hvilket CAS-værktøj skolen/kurset anvender på hf matematik B-niveau. Valget bør sættes i relation til:

- it-mulighederne på skolen/kurset
- at kursisterne også hjemme bør kunne arbejde med CAS-værktøjet
- det forhold, at CAS-værktøjet skal medbringes til både den skriftlige og mundtlige eksamen i matematik B.

Fælles for både CAS-værktøjet og andre it-værktøjer er, at de muliggør en mere eksperimenterende tilgang til begreber, emner og problemløsning i matematik. I læreplanens afsnit 3.2 om didaktiske principper står der specielt om CAS-værktøjet, at: ”*CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.*” Dvs. at CAS-værktøjet skal have en fremtrædende plads i undervisningen generelt og i kursisternes arbejde med både teori og problemløsning.

Man kan betragte brugen af it i undervisningen ud fra to synsvinkler. Nemlig egentlig *it-baserede* forløb, som er tilrettelagt således, at it-værktøjer er en nødvendig forudsætning for at kursisterne kan arbejde med det valgte emne, fx behandling af større datasæt, og *it-støttede* forløb, hvor it ikke er strengt nødvendigt, men hvor it kan støtte den daglige undervisning.

Det er en del af undervisningen at demonstrere og diskutere forskellige løsningsstrategier over for givne problemer. Derved kan man sætte fokus på forskellen mellem symbolske og numeriske løsninger. Kursisterne bør i grafisk ligningsløsning opnå kendskab til disse grafiske billeders begrænsninger, og de bør have indsigt i, at kendskab til de elementære funktionernes egenskaber er afgørende for at kunne forklare det grafiske forløb uden for ’billedet’. I læreplanens afsnit 4.2 om prøveformer hedder det: ”*Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3*”.

Det kræver, at CAS-værktøjet indgår som et naturligt hjælpemiddel i kursisternes daglige arbejde med de skriftlige opgaver i matematik, således at de opøver rutiner i brugen af værktøjet og derved bliver i stand til på en hensigtsmæssig måde at anvende værktøjet ved løsning af de centralt stillede eksamensopgaver.

3.j Undervisningstilrettelæggelse med it

It bør ligesom i andre fag være en naturlig del af den daglige undervisning i matematik på lige fod med andre undervisningsmaterialer, og videre i afsnit 3.3 fremgår det, at der: ”*I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning, til symbolsk differentiation og integration samt til løsning af differentialligninger. Endvidere indgår anvendelse af lommeregnere, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning.*”

Der skal ikke anvendes it for it's egen skyld, men fordi it kan være med til at kvalificere undervisningen og støtte kursisterne i, at:

- forstå matematiske ræsonnementer og beviser, og at danne matematiske begreber fordi it gør det muligt at fokusere på det væsentlige, fx ideen i tretrinsreglen frem for teknikken i udregningen, og ideen i beviset for cosinus-relationerne frem for de tekniske omskrivninger.
- udvikle matematiske færdigheder fx i forbindelse med talforståelse, faktorisering, reduktion samt ligningsløsning, idet kursisterne kan bruge værktøjet til at tjekke resultater og til at give umiddelbar respons på om omskrivninger er rigtige.
- benytte en eksperimentel tilgang til begreber og problemer, herunder at opstille hypoteser og at afprøve disse. Foruden det tidligere nævnte under eksperimentelle forløb gælder dette også i mange mindre del-undersøgelser som fx undersøgelse af, hvilken betydning koefficienterne i et 2. grads-polynomium eller konstanterne i de elementære funktioners regneforskrifter har for grafernes udseende. Tilsvarende kan gennemføres en eksperimenterende undersøgelse af, hvilken betydning de enkelte parametre som rente, afdragstid mv. har for en bestemt økonomisk problemstilling.
- opstille og udforske matematiske modeller, både gennem beregninger og grafiske fremstillinger af et datamateriale, fx modellering af et basketballkast ud fra en videooptagelse, af temperaturmåling, af puls og belastning mv.
- udforske sandsynlighedsteoretiske modeller og udføre statistiske test som beskrevet i eksemplet.
- kvalificere deres skriftlige arbejde ved at inddrage mulighederne for elektronisk kommunikation om skriftlige opgaver og for at give kursisterne feedback undervejs i arbejdet med et skriftligt produkt. En egentlig procesretning kan også udnytte it-faciliteternes muligheder.
- kommunikere deres forståelse af emner, begreber, problemer. Ved inddragelse af it-værktøjer i undersøgelsen af forskellige problemer kan man stimulere kursisternes behov for at diskutere resultater, hvad det er, de ser osv., samtidig med at it kan anvendes af kursisternes i deres præsentation af deres besvarelser af givne problemstillinger.

3.k Samspil med andre fag

I læreplanens afsnit 1.1 hedder det: ”*Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen*”. I læreplanens afsnit 3.4 om samarbejde med andre fag siges videre: ”*Hvor det er muligt, lægges der op til, at faget indgår i samspil med andre fag med det formål at tilrettelægge faglige forløb, som indeholder en mere omfattende anvendelse af matematik inden for andre fagområder, som kursisterne har kendskab til.*”.

Andre fag som kemi, biologi, geografi og samfundsfag anvender matematik til problemløsning og formulerer ofte hypoteser og teorier i matematikkens sprog. Matematik selv ”*har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori*”, hedder det i læreplanens afsnit 1.1. Problemstillinger fra andre fag udfordrer og stimulerer matematik til at finde metoder til at løse problemerne. Samtidig er sådanne problemer med til at vise betydningen af at beherske den abstrakte matematiske teori, og alle de forskellige eksempler er med til at gøre undervisningen mere levende og vedkommende for kursisterne.

Et samarbejde med andre fag kan således bidrage til at kursisterne kan ”*formidle viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder*”, som det hedder i læreplanens afsnit 2.1. Er dette ikke muligt, må man på holdet finde andre metoder, eksempelvis lade kursisterne fremlægge bestemte problemstillinger, de er blevet undervist i i andre fag. Det kan være emner som vækstmodeller, pH og reaktionsskemaer, arvelighed, nedbrydning af rusmidler, opinionsmålinger, målinger af kondital og puls, velfærdsmodeller, skat, lån og privatøkonomi, stikprøver af store databaser og troværdigheden af statistiske konklusioner mv.

3.l Introduktionskurset

Matematiks rolle i introduktionskurset er omtalt under læreplanen for hf C-niveau.

3.m Værkstedsundervisning

Matematik indgår i værkstedsundervisningen. Værkstedstimerne skal støtte kursisterne i udviklingen af gode studie- og arbejdsvaner (se Eksempel 155), bidrage til at udvikle kursisternes metakognitive tænkning og sikre tid til en selvstændig studiemæssig fordybelse (jf. læreplanen for værkstedsundervisning). Værkstedsundervisningen omfatter både studieværksted og lektieværksted.

Skriftligt arbejde, herunder skriftlig formidling, er et velegnet tema i værkstedsundervisningen. I forbindelse med holdets første matematikrapport (se Eksempel 155**)** kan en værkstedstime benyttes til at bevidstgøre kursisterne om, hvordan man hensigtsmæssigt arbejder med en sådan opgave, og at give dem en god start på rapportarbejdet. Også ved introduktion af projektarbejde i matematik er det nærliggende at benytte værkstedsundervisning.

Ligeledes er mundtlig fremstilling (se Eksempel 155**)** et muligt tema for en eller flere værkstedstimer. Man kan fx benytte en time til at træne kursisterne i at formulere sig sammenhængende om et matematisk emne, problem eller ræsonnement, og diskutere med dem, hvad man skal lægge vægt på i en sådan situation. Det faglige indhold kan være ren matematikteori eller en matematikanvendelse, eller det kan dreje sig om formidling af hovedpunkter fra en matematikrapport til de øvrige kursister på holdet.

Lektieværkstedet udgør en væsentlig del af værkstedsundervisningen. Her vil lektiehjælp i matematik, differentieret efter den enkelte kursists forudsætninger og evner, imødekomme et stort behov hos kursisterne.

Også eksamensforberedelse (se Eksempel 155**)** indgår normalt i værkstedsundervisningen. I matematik kan man bruge en værkstedstime på at gøre kursisterne bekendt med den mundtlige eksamensform og hjælpe dem til at håndtere situationen hensigtsmæssigt.

3.n Overgangen fra C- til B-niveau på hf-enkeltfag

På hf-enkeltfag er det udbredt, at et B-niveau i matematik ikke følger umiddelbart efter et C-niveau. Derfor vil der blandt kursisterne i matematik B-niveau på hf-enkeltfag ofte være stor forskel på, hvor lang tid før, den enkelte kursist har gennemført et C-niveau. Desuden har kursisterne oftest gennemført meget forskellige C-niveauer (nogle gange tillige fra forskellige ungdomsuddannelser). Ligesom i alle andre forløb er det læreren, der har ansvar for, at de faglige mål nås på matematik B-niveau. Kursisters varierende forudsætninger kan kræve særlige hensyn til tilrettelæggelsen.

Hvor det er muligt på C-niveau på et hf-enkeltfagskursus, bør man være opmærksom på de kursister i matematik, der ønsker at fortsætte på B-niveau. Det faktum, at kursisterne ikke skal til eksamen på C-niveau, bør give muligheder for forberedende forløb med opgaver og andet materiale, der er rettet mod B-niveau. Værkstedstimer kan evt. spille en rolle i dette (jf. omtalen af overgangen på toårigt hf).

Kursisterne har, når de begynder B-niveau på enkeltfag, ofte afsluttet C-niveau med eksamen. Dette betyder, at kursister på B-niveau i matematik på hf-enkeltfag ofte ikke på C-niveauet er blevet forberedt på B-niveauet. Overgangen kan derfor virke brat og markant.
Overgangen kan derfor kræve en ekstra indsats. Indsatsen bør være fremadrettet mod indholdet på B-niveau. Man bør være opmærksom på, at det vil ofte være muligt at berøre dele af C-niveauets stof undervejs på B-niveau, jf. nedenfor.
Det kan være en mulighed at få tilført værkstedstimer til B-niveauet, hvor værkstedstimerne kan være en støtte, så flest mulige af kursisterne kommer godt i gang på B-niveau. Det kan være, at nogle af kursisterne har behov for en kort brush-up, eller man kan tilrettelægge en introduktion for hele holdet, hvor stof fra C-niveau indgår (såsom de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktioner, beregninger i retvinklede trekanter eller statistik). Hvor det er muligt på et enkeltfagskursus, kan man også målrette en indsats for udvalgte kursister.

3.o Eksamen i det faglige stof fra C-niveau

At kursisterne på hf-enkeltfag i matematik på B-niveau ofte har meget forskellige forløb i C-niveau bag sig, giver en særlig udfordring for forberedelsen til eksamen på B-niveau.
Det vil typisk *ikke* være muligt at lade alle kursister gå til eksamen på B-niveau i rapporter fra C-niveau, fordi kursisterne fx ikke har udarbejdet tilstrækkeligt med rapporter eller ikke længere er i besiddelse af rapporterne.
Det vil være muligt at udforme eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen således, at kursister, der er i besiddelse af rapporter fra C-niveau, vil kunne eksamineres i disse, mens kursister, der ikke er i besiddelse af rapporter fra C-niveau, kan eksamineres i åbne spørgsmål til stoffet.
På enkeltfags-hf kan det være en fordel, at det er hele det faglige stof fra både C- og B-niveau, der evalueres til den skriftlige og mundtlige eksamen. Man kan således undervejs i forløbet på B-niveau berøre de dele af stoffet som ligger til grund for B-niveau.
Fx kan det være en mulighed at lade stof fra C-niveau indgå i rapporter, der skrives på B-niveau.
Der kan nævnes følgende muligheder for at lade stof fra C-niveau indgå:

- At inddrage retvinklede trekanter i arbejdet med trigonometri. Fx kan inddrages bevis for Pythagoras' læresætning som eksempel på et simpelt geometrisk bevis. En sådan inddragelse af stof fra C-niveau kan være nødvendig, fordi det kan være et stykke tid siden, kursisten har arbejdet med trigonometri, og det kan være en støtte i tilegnelsen af trigonometrien. Inddragelse af stof fra C-niveau betyder naturligvis *ikke,* at stof fra B-niveau kan fravælges.

- At behandle de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktionerne i arbejde med matematiske modeller. En indgang til arbejdet med matematiske modeller på B-niveau kan fx indledes med en meget kort gennemarbejdning af de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktioner. Dette kan være afsæt til behandlingen af funktionerne, fx vedrørende monotoni, definitions- og værdimængde og logaritmefunktioner.
- I statistikforløb at have øje for grundlæggende statistiske deskriptorer i forløb i statistik. Forløb i statistik kan fx tilrettelægges, så de statiske deskriptorer, der behandles på C-niveau, også berøres på B-niveau. Også her betyder evt. inddragelse af stof fra C-niveau naturligvis *ikke*, at stof fra B-niveau må fravælges.

Man bør være opmærksom på, at mens statistik på C-niveau indgår i både mundtlig og skriftlig eksamen, så indgår emnet på B-niveau kun i den mundtlige eksamen.

På grund af kursisternes meget forskellige situationer med hensyn til eksamen på B-niveau kan det også her være en mulighed med en målrettet indsats vha. værkstedstimer.

4. Evaluering

4.a Løbende evaluering

I afsnit 4.1 af læreplanen hedder det: "*Både undervisningen og kursisternes faglige udbytte heraf evalueres løbende, bl.a. gennem fremadrettede evalueringssamtaler.*" Sigtet med den løbende evaluering er altså dobbelt. Dels skal den vejlede den enkelte kursist i det videre arbejde med faget, dels skal den afdække om undervisningens tilrettelæggelse er optimal med hensyn til kursisternes udbytte.

Målet med den løbende evaluering er:

- At kursisterne fra begyndelsen af forløbet bliver opmærksomme på, hvor deres stærke og svage sider er i forhold til matematik
- At læreren vurderer, hvor gode kursisterne er til at lære matematik
- At kursisterne løbende får respons, så de ikke er i tvivl om deres faglige niveau
- At evaluere undervisningsforløb – undervejs eller når de afsluttes.

I læreplanen hedder det: "*For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes kursisternes udbytte af forløbet evalueres.*"
Metoderne i den løbende evaluering er mange og kan fx være:

- Respons på skriftlige opgaver. I læreplanen hedder det: "*Kursisterne afleverer jævnligt skriftlige opgaver og rapporter. Besvarelserne rettes og kommenteres af læreren*." Kommentarerne skal hjælpe kursisten videre. Derfor er det vigtigt, at der skrives kommentarer, med vejledning som hjælper kursisten videre. Hvis kursisterne elektronisk afleverer deres afleveringsopgaver, kan man som lærer udnytte, at man får overblik over den respons, man giver til opgaverne. Man kan selv samle de anbefalinger og vejledninger, man skriver fra gang til gang, eller man kan udnytte evt. faciliteter i skolens it-platform. Herved kan indsatsen målrettes, og man kan som lærer tydeligere følge kursistens udvikling. Kursistens udbytte er, at vedkommende tydeligere fokuserer indsatsen på, hvad vedkommende ikke er så god til.
- Respons på skriftlige rapporter. Det vil ofte hjælpe kursisten at give en første respons til et udkast til rapporten. Dette kan kursisten anvende til at færdiggøre rapporten. Det kan også

være en fordel, hvis rapporten skal anvendes til den mundtlige eksamen (kursisten får mulighed for at fjerne eventuelle fejl). Rapporter lagt på klassens elektroniske platform vil kunne anmeldes af andre kursister som en del af evalueringen. Sådanne anmeldelser vil kunne indgå som materiale i et fagligt samarbejde med dansk.
- Mundtlig fremlæggelse, både af mindre og større opgaver. I forbindelse med projekt- eller emneforløb vil det være muligt at lade kursister fremlægge matematisk stof mundtligt for hinanden. Sådanne fremlæggelser kan evalueres både af læreren og af resten af holdet.
- Traditionelle test og skriftlige prøver, der tester om kursisterne har forstået stoffet. I læreplanen hedder det: "*Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål.*" Man kan som lærer fx anvende en sådan test som udgangspunkt for en evaluering på klasseplan. Men en anden lige vigtig side ved test er, at give kursisterne mulighed for selvevaluering. Ved hjælp af fx elektroniske platforme kan man henvise kursisterne til sådanne selvrettende test. Sådanne test kan for nogle kursister virke motiverende. Desuden vil sådanne test kunne danne udgangspunkt for en evaluering.
- Evalueringssamtaler, se nærmere i næste afsnit

Kursisterne kan inden eksamen få mulighed for enkeltvis, i gruppe eller i klasse at formulere, hvad deres mål med eksamen er. Ved at formulere et sådant mål gøres kursisten klar over, hvad vedkommende skal arbejde mod, og det giver læreren (og evt. tutoren) mulighed for at konfrontere kursisten med evt. diskrepans mellem mål og indsats.

Studiebogen inddrages i den løbende evaluering

4.b Samtaler

Samtaler vil kunne indgå som en del af evalueringen. Evalueringen kan herved anvendes fremadrettet, så kursisten bliver hjulpet til eksplicit at formulere sit fokus for at få det bedste udbytte af undervisningen i matematik. Sådanne samtaler kan fx finde sted, mens resten af holdet arbejder med programlagt stof (fx løser opgaver). Hvis to eller flere hold er skemalagt parallelt, kan det være en idé at lade holdene arbejde samlet, mens der finder samtaler sted.

En evalueringssamtale kan have en varighed på højst 10-15 minutter. I en evalueringssamtale er det målet, at det fortrinsvis er kursisten, der taler. Derfor vil det være en god idé, hvis kursisten før samtalen får udleveret en række spørgsmål, som vil indgå i samtalen. Et væsentligt element i samtaler bør være selvevaluering. Kursisterne er ofte gode til at vurdere deres eget faglige niveau, og udbyttet af evalueringssamtalen kan øges, ved at kursisten selv formulerer, hvad vedkommende skal fokusere på i det fortsatte arbejde.

Eksempler på spørgsmål til evalueringssamtaler kunne være:
- Hvordan oplever du selv det går?
- Hvordan bedømmer du dit eget niveau?
- Hvordan bedømmer du dit aktivitetsniveau?
- Hvad er dit mål med forløbet i matematik?
- Hvad mener du, at du bør fokusere på i det fortsatte arbejde i matematik?

På toårigt hf bør tutor inddrages i evalueringssamtaler – enten kan det være tutoren, der afholder samtaler, eller også kan evalueringssamtaler tilrettelægges i samarbejde mellem tutor og matematiklærer.

4.c Evaluering af selve undervisningen

I læreplanens afsnit 4.1 hedder det: ”*Efter hvert større projekt- eller emneforløb gennemfører lærer og kursister en evaluering af undervisningen, arbejdsformer og fremskridt på vejen mod opfyldelsen af de faglige mål.*”

Evaluering af selve undervisningen kan finde sted både mundtligt, skriftligt og som en kombination af disse. Evalueringen kan indgå som en naturlig del af afslutningen af et forløb, og man vælger selv omfanget af evalueringen. Det kan dog gøre det lettere for den enkelte lærer, hvis man på kurset i hele lærergruppen, i faggrupper eller i mindre grupper (måske i team) udarbejder skabeloner for evaluering.

Fx kan et forløb ved afslutningen evalueres ved, at kursisterne besvarer et spørgeskema. Man kan anvende faste spørgeskemaer ved hver evaluering, eller man kan have en fast skabelon, som man justerer fra gang til gang. Spørgeskemaerne kan være i trykt form, eller de kan være elektroniske – fx på kursets it-platform. Man kan evt. på it-platformen vælge at gøre besvarelserne anonyme. Fordelen ved at anvende skriftlig evaluering er, at individuelle opfattelser kan komme frem.

Evalueringsskemaer kan fx indeholde spørgsmål som:

- Hvad har været det mest positive ved forløbet?
- Hvad har været det mest negative ved forløbet?
- Hvad har du lært gennem forløbet?
- Hvordan vil du bedømme din egen arbejdsindsats?

Evalueringsskemaer kan i sig selv udgøre en evaluering, men ofte vil det være hensigtsmæssigt at lade evalueringsskemaer være udgangspunkt for en mundtlig evaluering. I sådanne tilfælde vil det nogle gange være fordelagtigt som lærer at have set de besvarede spørgeskemaer før den mundtlige evaluering, mens det andre gange kan det være en fordel, at kursisterne enten har udfyldt skemaerne umiddelbart før den mundtlige evaluering eller udfylder evalueringsskemaer i timen – enten individuelt eller i grupper. Fordelen ved at have læst evalueringsskemaerne før den mundtlige evaluering er, at man som lærer kender nuancerne i evalueringerne og måske kan få forhold frem, som ellers ikke vil blive nævnt. Ulempen, ved at læreren skal læse skriftlige evalueringer før en mundtlig evaluering, er, at evalueringen kan blive strakt i tid.

En mundtlig evaluering kræver, at kursisterne i høj grad kommer til orde, og det er afgørende, at kursisterne lytter til hinanden. Man bør være opmærksom på, at det kan være vanskeligt at styre diskussionen, og det kan være vanskeligt at sikre, at alle nuancer kommer frem.

Hvis man ønsker en grundigere evaluering, kan man fx anvende gruppeinterviews. Ligesom i den mundtlige evaluering vil det her være en fordel, hvis kursisterne får mulighed for at forberede sig, fx ved før interviewet at få en slags dagsorden eller nogle spørgsmål til overvejelse.

4.d Den skriftlige prøve

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det: ”*Til den skriftlige prøve gives der 4 timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål, beskrevet i afsnit 2.1. Den første del af sættet skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven må eksa-*

minanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3."

4.e Formulering af opgaverne

Ved beregninger af enhver art arbejdes der inden for mængden af reelle tal eller delmængder heraf. Komplekse tal vil derfor aldrig høre med til en ønsket løsningsmængde.

I en opgavetekst vil det ofte forekomme, at grundmængden for en ligning ikke direkte er nævnt. Det er da altid underforstået, at grundmængden skal vælges så omfattende som muligt inden for de reelle tal.

Ligeledes vil det ofte forekomme, at definitionsmængden for en given reel funktion ikke udtrykkeligt er angivet i opgaveteksten. I sådanne tilfælde er det altid underforstået, at definitionsmængden er den mest omfattende delmængde af de reelle tal, inden for hvilken den angivne forskrift har mening. En modelsituation kan lægge begrænsninger på variationen af de variable ud over de rent matematiske begrænsninger. Er dette ikke eksplicit angivet i opgaveformuleringen, er det en del af besvarelsen at redegøre for, hvilke intervaller der arbejdes indenfor.

Brug af ord som 'skitse' og 'tegn' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlig for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse og modeller af trekanter tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'beregn skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske contra numeriske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte kursisterne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl. I opgaver, hvor der ønskes en begrundelse for antallet af løsninger eller for at den samlede løsningsmængde er bestemt, vil dette fremgå af opgaveteksten.

I opgaver, hvor der skal argumenteres for at den samlede løsningsmængde er bestemt, eller hvor der skal bestemmes lokale ekstrema, vil der ofte være forskellige veje til målet, og der foreskrives ikke nogen bestemt metode. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i dette, herunder hvorledes man kan argumentere ved hjælp af $f'(x)$.

I opgaver inden for integralregning vil det altid fremgå af opgaveteksten, hvis man ønsker angivelse af en stamfunktion eller et ubestemt integral. Når ubestemte integraler bestemmes ved hjælp af et CAS-værktøj forventes det ikke, at kursisterne kan omskrive et svar, hvori der indgår funktioner, som ikke er en del af kernestoffet.

I delprøven med hjælpemidler kan der i modelsituationer optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj, jfr. vejledningens afsnit 2d.

I en modelopgave kan eksaminanderne få et datamateriale for sammenhængen mellem variable samt oplysninger om, hvilken matematisk modeltype der kan beskrive materialet. Eksaminanderne skal kunne opstille og håndtere denne model, herunder stille spørgsmål til og besvare spørgsmål vedrørende modellen, men de forventes ikke ved den skriftlige eksamen at kunne begrunde én bestemt model frem for andre. Det forventes, at eksaminanderne kan udføre lineær, eksponentiel og potensregression.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde, hvor der ikke foreligger entydige internationale regler, blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. I prøven uden hjælpemidler vil funktionsudtryk som $\sqrt[a]{x^b}$ altid være omskrevet på formen x^a.

Ligesom e^{kx}, a^x, $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$ både kan betegne funktionen og en funktionsværdi, således kan det også generelt forekomme, at symbolet $f(x)$ anvendes til både at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Konteksten vil afgøre, om det er hensigtsmæssigt eller ej at anvende parenteser i udtryk som $\ln(x)$ og $\ln x$ osv. Kan det misforstås, vil man altid sætte parenteser, som i $\ln(a \cdot b)$.

Der anvendes som standard dansk komma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser: Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

Punkter i et koordinatsystem kan både blive angivet på formen $P(2,3)$, $P = (2,3)$ og alene med koordinatsættet (2,3). Den samme notation vil blive anvendt ved beskrivelse af punkter på en graf.

4.f Eksamenssættets udformning

Delprøven med hjælpemidler kan indeholde valgfrie opgaver. Er dette tilfældet vil det tydeligt fremgå af sættet, hvor mange af de valgfrie opgaver der må afleveres til bedømmelse.

Til eksaminandernes orientering vil det i eksamenssættet være anført, hvilken pointfordeling der lægges til grund for vurderingen af besvarelsen. En fuldstændig besvarelse giver 100 point, hvoraf de 25 henhører til prøven uden hjælpemidler. Et antal point, maksimalt 10 % af det samlede pointtal reserveres til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen.

Ifølge læreplanen består eksamenssættet "*af opgaver stillet inden for kernestoffet og som skal evaluere de tilsvarende faglige mål beskrevet i afsnit 2.1*". I hovedafsnit 2 i denne undervisningsvejledning er der i hovedtræk redegjort nærmere for, hvad dette betyder for opgaverne til prøven med hjælpemidler.

4.g Prøven uden hjælpemidler

Det forventes, at kursisterne kan

- opstille enkle formler ud fra en sproglig beskrivelse
- anvende nulreglen og løse simple første og 2. gradsligninger
- anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk, der ikke er meget komplicerede
- sætte tal ind i forskrifter
- håndtere eksponentiel notation og anvende potensreglerne
- isolere ukendte størrelser
- redegøre for andengradspolynomiers grafer
- bestemme lineære og eksponentielle regneforskrifter
- differentiere polynomier, potensfunktioner, e^{kx} og $\ln(x)$
- anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- bestemme en tangentligning
- anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- aflæse væksthastighed grafisk
- bestemme stamfunktioner til polynomier, potensfunktioner, e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
- anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion og areal.

4.h Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

For det skriftlige eksamenssæt gælder, at der i bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.

4.i Den mundtlige prøve

For hvert hold træffes et valg mellem to prøveformer:

”*Prøveform a): En mundtlig prøve på grundlag af et overordnet spørgsmål med konkrete delspørgsmål. Spørgsmålene til prøven er offentliggjort i god tid inden prøven og er udformet således, at de tilsammen gør det muligt at evaluere de faglige mål, der er beskrevet i afsnit 2.1. Spørgsmålene og en fortegnelse over undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.*”

Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte undervisningsforløb er nogle kortere forløb eller delforløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet hav-

de. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 64 stk 2 i hf bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).
Den enkelte lærer finder sin egen måde ”at holde regnskab med”, hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der måske kan udnyttes i den planlægning (se Eksempel 403). Listen over de undervisningsforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle kursister.
Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i gennemførte undervisningsforløb. Det enkelte eksamensspørgsmål skal gøre det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og være udformet således, at eksaminationen kan bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.
Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen. Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre kursisterne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.
Udkast til eksamensspørgsmål placeres efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af undervisningsforløbene. Spørgsmål og en fortegnelse over undervisningsforløbene sendes til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene.

”*Prøveform b): En mundtlig prøve på grundlag af rapporter udarbejdet i tilknytning til undervisningen. Den enkelte eksaminands rapporter skal som helhed dække de faglige mål, der er beskrevet i afsnit 2.1. Eksamensspørgsmålene udformes med en overskrift og konkrete delspørgsmål i relation til rapporterne. Spørgsmålene og en fortegnelse over rapporter og undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.*”
Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb, herunder projektforløbene. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte projektforløb og emneforløb er nogle kortere forløb eller delforløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet havde. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 64 stk 2 i hf bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).
Den enkelte lærer finder sin egen måde ”at holde regnskab med”, hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der

måske kan udnyttes i den planlægning (se Eksempel 403). Listen over de projektforløb og emneforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle kursister. Nogle kursister kan have gennemført tidligere forløb til C-niveau i flere forskellige sammenhænge og kan vælge at lade projektformuleringer herfra indgå til mundtlig eksamen. Andre kursister er måske ikke længere i besiddelse af rapporter fra tidligere forløb og går derfor til mundtlig prøve på grundlag af de projektformuleringer, læreren har udformet.
Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i projektforløb og emneforløb. For hvert projekt foreligger en projektformulering, der rummer en sådan faglig bredde og dybde, at en eksamination med udgangspunkt heri gør det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og at bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.
Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen. Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre kursisterne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.
Udkast til eksamensspørgsmål placeres efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af projektformuleringerne. Bestemte eksamensspørgsmål kan have én fælles overskrift, men forskelligt udformede undertekster, der hver peger i retning af de forskellige projektformuleringer, kursisterne har arbejdet med. Samtidig sendes spørgsmål og en fortegnelse over projektforløbene til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene / prøvegrundlaget.

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det videre: ”*Eksaminationstiden er 30 minutter pr eksaminand. Der gives 30 minutters forberedelsestid.*
Prøven er todelt.
Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, henholdsvis præsentation af den udtrukne rapport og dennes faglige delmål, suppleret med uddybende spørgsmål fra eksaminator.
Anden del former sig som en samtale mellem eksaminand og eksaminator med udgangspunkt i det overordnede spørgsmål, henholdsvis rapportens genstandsfelt.”
Endelig hedder det i læreplanen vedrørende prøveform (b), at der ”*alene tages hensyn til den mundtlige præstation*”.

Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Der må gerne være dubletter. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.
Uanset prøveform skal det enkelte eksamensspørgsmål være så præcist formuleret, at der ikke kan være tvivl om, hvilket stofområde der vil blive eksamineret i. Udtryk som ”du kan evt. komme ind på...”, eller ”hvis der bliver tid ...” skal undgås.
Eksamensspørgsmålene må hverken indeholde en disposition for eksaminationens forløb, eller stikord til samtaledelen.

Uanset prøveform opbygges eksamensspørgsmålet todelt med en forholdsvis kort overskrift og en uddybende undertekst med et eller flere konkrete delspørgsmål. De(t) konkrete spørgsmål er det stof, eksaminanden selv skal komme med et oplæg om. Samtaledelen bevæger sig inden for de rammer som overskriften udstikker.

Der er ingen fast regel for, hvor længe hver af de to faser i eksaminationen skal vare, men normalt bør der afsættes godt halvdelen af eksamenstiden til første del.

Såfremt en eksaminand har udarbejdet en rapport i papir eller elektronisk format om eksamensspørgsmålets genstandsfelt, er det naturligt, at eksaminanden inddrager rapporten i sin besvarelse af eksamensspørgsmålet. Er der anvendt bestemte geometriske, statistiske eller andre værktøjsprogrammer kan dette også indgå ved eksaminationen. Dog er det afgørende, at det er de matematiske færdigheder og ikke en teknisk formåen, der kommer til at stå i centrum for eksaminationen.

Eksaminator leder eksaminationen, men det er vigtigt, at eksaminanden får mulighed for en selvstændig fremlæggelse og ikke for hurtigt afbrydes. Det er ligeledes vigtigt, at forskellen mellem første og anden del af eksamen træder klart frem, således at første del ikke for hurtigt bliver til en samtaledel.

Samtalen kan tage udgangspunkt i nogle elementer fra første del og give eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelser af noget teori, at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over det faglige område. I samtaledelen kan man ikke afkræve eksaminanden bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem. Fejl og faglige misforståelser kan give anledning til opklarende spørgsmål, men dette må ikke udvikle sig til undervisning.

Eksaminanderne må have alle hjælpemidler, lærebøger, notater, rapporter, dispositioner til spørgsmålene mv. med både til forberedelsen og i selve eksamenslokalet. Eksaminanderne skal ikke bruge forberedelsestiden på at skrive en eventuel disposition de har lavet hjemmefra over på et andet stykke papir, men på at forberede sig på det spørgsmål, de har trukket.

Under selve eksaminationen må eksaminanden støtte sig til notater eller henvise til en rapport, men skal før prøvens afholdelse være gjort opmærksom på, at oplæsning eller afskrift af sådanne notater ikke tæller positivt med i bedømmelsen.

4.j Bedømmelseskriterier og karaktergivning

I læreplanens afsnit 4.3 er opridset de bedømmelseskriterier, der lægges til grund for bedømmelsen af såvel skriftlige som mundtlige præstationer. Det vil altid afhænge af det faglige stof, eller det konkrete eksamensspørgsmål, hvilke af de omtalte kriterier, der naturligt er i spil i den givne situation:

”*Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de faglige mål, som er angivet i 2.1.*

I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder

- *kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber*
- *har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt*
- *er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt*

2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder

- *kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer*
- *kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde*
- *kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde*

3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder

- *kan perspektivere matematikkens udvikling*
- *har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag*
- *kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling*
- *demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.*”

I læreplanen hedder det endelig: ”*I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse*”.

En præstation, der fuldt ud opfylder de relevante faglige mål, vurderes til ”fremragende”, jf. bekendtgørelse nr 448 af 18/05/2006 (Bekendtgørelse om karakterskala og anden bedømmelse).

En præstation, der fuldt ud opfylder de relevante faglige mål, vurderes til ”fremragende”, jf. bekendtgørelse nr 448 af 18/05/2006 (Bekendtgørelse om karakterskala og anden bedømmelse).

Nedenfor er i skematisk form vist, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på B-niveau:

Hf B Skriftlig
I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt
Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan redegøre for og anvende modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om anvendelse af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende it-værktøjer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

Hf B Mundtlig

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan diskutere rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teori	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et simpelt matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematiske symboler.	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller kan formidle viden om et område, hvor matematik anvendes.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik.

5. Paradigmatiske eksempler

1. **Eksempel 121: Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter**
2. **Eksempel 124: Eksperimenterende forløb: Hvordan finder man tangenten?**
3. **Eksempel 129: Eksperimentelt forløb: Grafkending**
4. **Eksempel 134: Beviser og ræsonnementer**
5. **Eksempel 153: Eksempler på opgaveformuleringer til matematikrapporter på B-niveau**
6. **Eksempel 155: Værksted og matematik hf B**
7. **Eksempel 161: Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst**
8. **Eksempel 201: Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge**
9. **Eksempel 202: Hverdagsøkonomi: skatteberegning**
10. **Eksempel 205: Tak for kaffe - Et forløb om lineær og eksponentiel regression.**
11. **Eksempel 209: Kriminaliteten i tal – et forløb i statistik**
12. **Eksempel 209a: Hvad er meningen? – et forløb om opinionsmålinger**
13. **Eksempel 221: Stikprøver og databaser**
14. **Eksempel 224: Velfærdssamfundet og befolkningsudvikling i Danmark**
15. **Eksempel 280: Sammenligning af to måleserier**
16. **Eksempel 281: Simpsons paradoks**
17. **Eksempel 283: Kan man smage forskel?**
18. **Eksempel 293: Vækstmodeller og differentialregning**
19. **Eksempel 302: Statistik, formidling og medier**
20. **Eksempel 403: Liste over gennemførte forløb. Hf B-niveau. Eksempel**

Eksempel 121:
Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter

Hvordan differentierer man funktioner opbygget af en differentiabel funktion f(x)?

Hvordan differentierer man $f(x)^2$ **,** $f(x)^3$ **,** $\frac{1}{f(x)}$ **,** $\frac{1}{(f(x))^2}$ **,** $\sqrt{f(x)}$ **,** g(f(x))?

Formål: At udvikle fortrolighed med differentiabilitet og tretrinsreglen samt at træne elementer fra udledningen af differentialkvotienten for x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$.

At udvikle undersøgekompetencen gennem arbejdsgangen
eksempler → generalisering → verificering.

Mål: At eleverne bliver i stand til selvstændigt at arbejde med tretrinsreglen og til at bestemme differentialkvotienten af en sammensat funktion g(f(x))

Problemformulering: Hvordan differentierer man $f(x)^2$, $f(x)^3$, $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{(f(x))^2}$, $\sqrt{f(x)}$, g(f(x)), når man ved, at f(x) er differentiabel?

Forudsætning: Eleverne har udledt differentialkvotienten for de elementære funktioner x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, og at de har set beviset for konstant-faktor reglen og sum reglen.

Produkt: En rapport som besvarer spørgsmålene i problemformuleringen og omfatter løsning af følgende opgave samt en beskrivelse af arbejdsprocessen, der ledte frem til svaret. Endvidere skal rapporten indeholde en overvejelse over svarets sandhedsværdi.

Opgave: Bestem differentialkvotienten for følgende funktioner:

$\left(x^3+1\right)^2$, $\left(x^4+1\right)^{12}$, $\sqrt{x^4+x^2+1}$, $\frac{1}{x^6+x^4+4}$, $\ln(x^6+x^4+4)$

Tidsforbrug: 6-8 timer

Eksempel 124:

Eksperimenterende forløb: Hvordan finder man tangenten?

Formål: At udvikle fortrolighed med tangentbegrebet, herunder forståelse af at tangenthældningen er en funktion, gennem
-tegning af tangenten til en graf i et punkt ved hjælp af en grafregner eller et matematikprogram
-aflæsning af ligning og hældning grafregner eller et matematikprogram
-ud fra en tabel over tangenthældning for en elementær funktion at nå frem til en forskrift for tangenthældningen ved at benytte metoden
tabel → plot → forskriftstype(grafkending) → regression → check ved sammenligning af resultat og tabelplot
-udledning af den afledede for simple funktioner: sekant er en approksimation, bedre approksimation ved mindre tilvækst, ”grænseværdi”
Endvidere at udvikle og bruge evnen til at genkende en graf. At øve og anvende metoden til at komme fra tabel til forskrift. At øve og skærpe undersøgekompetencen gennem arbejdsgangen
eksempler → generalisering → verificering
ved at stille større krav til verifikationen (her kommer eleverne tæt på at skulle bevise de opstillede hypoteser).

<u>Mål</u>: At eleverne bliver i stand til at bestemme en ligning for tangenten til grafen for en funktion af typen $f(x) = x^a$ med og uden elektroniske hjælpemidler

<u>Problemformulering</u>: Hvordan bestemmer man tangenten til grafen for funktionerne $f(x) = x^a$ i et givet punkt? Hvilke begrundelser er der for rigtigheden af den valgte metode?

<u>Produkt</u>: En rapport som besvarer spørgsmålene i problemformuleringen og omfatter løsning af følgende opgave samt en beskrivelse af arbejdsprocessen, der ledte frem til svaret. Endvidere skal rapporten indeholde en overvejelse over svarets sandhedsværdi.

<u>Opgave</u>: I) Benyt grafregner eller et matematikprogram. Betragt funktionen $f(x) = x^2$. Tegn grafen for *f*(*x*). Tegn ved hjælp af grafregner eller program tangenten til grafen i P(1,f(1)). Aflæs ligning fra grafregner eller program. Aflæs tangenthældningen. Udfør det samme arbejder med andre tangenter. Udfyld en tabel som følgende:

x-koordinat til punktet på grafen	-1	1	2	3	4	5
Tangenthældning *a* punktet						

Lav et plot af tabellen. Gæt på en sammenhæng mellem x og *a*. Bestem det bedste gæt. Verificér gættet.
Benyt samme fremgangsmåde til at opnå et gæt på tangenthældningen for mindst 3 af funktionerne
x^3, x^4, x^5, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\ln x$.

II) Betragt $f(x) = x^2$ og punktet P(2,f(2)). Tegn sekanten gennem P og Q(3,f(3)). Sekanten er en approksimation til tangenten. Benyt sekanten til at opnå en approksimation til tangenthældningen i P. Gør approksimationen bedre gennem en række trin, hvor Q kommer tættere på P. Hvad skal der til for at hoppe fra approksimation til hældningen *a*?

<u>Tidsforbrug</u>: 6-8 timer

Eksempel 129**:**
Eksperimentelt forløb: Grafkending

Polynomier og deres grafer

Formål: At styrke en geometriske opfattelse af polynomier og at opøve evnen til at undersøge en given problemstilling gennem eksperimentel afprøvning, generalisering og verificering.

Mål: At eleverne uden hjælpemidler kan beskrive det mulige udseende af grafen for et givet polynomium
fx $f(x)=x^4-3x^2+2$, $f(x)=x^4-3x^2$, $f(x)=x^3-3x^2+2$, $f(x)=x^7-3x^5+2x+1$

Tidsforbrug: 4-5 timer
Problemformulering: Hvilken beskrivelse af kan man give af grafen for et polynomium af n'te grad? Hvor mange skæringspunkter med første aksen kan grafen have? Hvor mange maks-/min-punkter kan den have?

Produktkrav: En rapport på maksimalt 5 sider, som besvarer det formulerede problem, og beskriver arbejdsprocessen, som førte frem til besvarelsen. Endvidere skal rapporten omfatte en overvejelse over sandhedsværdien af det opnåede resultat.
Rapporten tæller 1 aflevering.

Eksempel 134**:**

Beviser og ræsonnementer

Forløbet fokuserer på matematiske beviser. Der indgår beviser fra forskellige dele af stof fra hf-tilvalg.
Det er en forudsætning, at kursisterne har kendskab til trigonometri og differentialregning.

Mål
Målet er at gøre kursisterne bevidste om, hvad et matematisk bevis er, få indtryk af forskellige typer af beviser og blive opmærksomme på, hvad der skal til for at bevise en påstand.

Niveau
Forløbet er for B-niveau på hf.

Arbejdsformer
I forløbet kan beviser gennemarbejdes i fællesskab på holdet, og derefter kan holdet i grupper gennemarbejde andre beviser og enten fremlægge dem mundtligt eller skrive dem ned i en rapport. Beviserne kan også fordeles i grupper på holdet, hvor grupperne så efterfølgende mundtligt fremlægger for resten af holdet.

Timeforbrug
Timeforbruget i matematik vil være 6-8 klokketimer.

Indhold
Det direkte bevis:
geometriske beviser: bevis for differentiation af sinusfunktionen

udregningsbeviser:
bevis for cosinusrelation
bevis for løsningsformel til løsning af andengradsligning
bevis for toppunkt for andengradspolynomium

Det indirekte bevis:
fx bevis for kvadratrod 2 et irrationalt tal

Induktionsbevis:
bevis for $(x^n)'$
bevis for 1+2+3…+n = n(n+1)/2

Undervisningsmaterialer
Beviser fra forskellige undervisningsbøger.
Udvalgt materiale om matematiske beviser.

Eksempel 153**:**
Eksempler på opgaveformuleringer til matematikrapporter på B-niveau

Eksempel 1: Rapport om differentialregning
1. Lav en oversigt over de vigtigste begreber, sætninger og metoder i differentialregning.
2. Gennemgå beviset for en af de centrale sætninger i differentialregning (efter eget valg).
3. Forklar ud fra et eksempel, hvordan differentialregning kan benyttes til optimering. (Du kan fx hente inspiration i opgavehæftet side xx - yy).
4. Gør rede for den epidemimodel, som I har arbejdet med i grupper. Forklar de enkelte ligninger, print en karakteristisk løsningskurve ud, og beskriv herudfra, hvordan epidemien kan forløbe.

Eksempel 2: Rapport om bevisførelse i differentialregning
Formålet med rapportarbejdet er, at I skal opnå en bedre forståelse af matematisk bevisførelse.

Vælg tre af de sætninger inden for differentialregning, som vi har bevist, og hvor I synes, at beviserne ikke ligner hinanden ret meget. I skal have jeres valg godkendt af læreren.

For hver af de tre sætninger skal I:
- gøre rede for de definitioner, som sætningen bygger på
- forklare, hvad sætningen siger
- forklare ideen/metoden i beviset
- gøre rede for, hvad der antages, og hvad der skal vises
- gennemgå beviset.

Gør desuden rede for de vigtigste forskelle og ligheder mellem de tre beviser.

Eksempel 155**:**
Værksted og matematik hf B

Eksempel 1: Holdets første matematikrapport
Den første rapportopgave er netop blevet stillet. Timens formål er ikke at nå langt med besvarelsen af den, men at bevidstgøre kursisterne om, hvordan man hensigtsmæssigt arbejder med den, og at give dem en god start på rapportarbejdet. I det følgende er det forudsat, at der er tale om en rapport (evt. et projekt), hvor i hvert fald en del af arbejdet skal foregå i grupper.

Timens forløb:
- Formålet med timen og programmet for den præsenteres for kursisterne.
- Gruppedannelse, evt. efter en kort diskussion af gruppestørrelser og kriterier for gruppedannelsen.
- Fælles diskussion af, hvordan gruppearbejdet mest hensigtsmæssigt kan tilrettelægges. Fx kan følgende spørgsmål tages op: Hvilke arbejdsopgaver kan deles ud til gruppens medlemmer, og hvordan kan det efterfølgende sikres, at udbyttet bliver en fælles viden i gruppen? Hvilke arbejdsopgaver bør løses af alle, enten i fællesskab eller ved at man "arbejder side om side"?
- Grupperne påbegynder arbejdet.
- Afsluttende fælles diskussion, fx om nogle af følgende spørgsmål: Hvad er karakteristisk for en god besvarelse? Hvordan kan man forklare tingene "med sine egne ord", så besvarelsen bliver en passende kombination af hverdagssprog og korrekt fagsprog? Hvordan formidler man matematik til andre?

Eksempel 2: Mundtlig fremstilling
Formålet med timen er at træne kursisterne i mundtligt at formulere sig sammenhængende om et (matematisk) emne eller problem og at gøre dem bevidste om, hvad man skal lægge vægt på i en sådan situation. Ikke mindst i matematik er en sådan mundtlig fremstilling vanskelig for mange kursister. Der kan fx fokuseres på retoriske elementer, på den faglige formidling – herunder en hensigtsmæssig kombination af hverdagssprog og fagsprog – og på det matematiske ræsonnement.

Timens forløb:
- Læreroplæg om mundtlig fremstilling i matematik.
- Fælles diskussion.
- Små foredrag i grupper på to eller tre om en matematisk problemstilling. Det pågældende emne kan være læst som forberedelse til timen eller være noget, holdet tidligere har arbejdet med.
- Fælles diskussion med erfaringsopsamling.

Forløbet følges op i den efterfølgende matematikundervisning, hvor der lægges særlig vægt på den mundtlige dimension.

Eksempel 3: Forberedelse til mundtlig eksamen
Formålet med timen er at gøre kursisterne bekendt med den mundtlige eksamensform og hjælpe dem til at håndtere situationen hensigtsmæssigt. Der kan fokuseres på spørgsmål som:
- Hvordan ser et eksamensspørgsmål (i matematik) ud?

- Hvad er de formelle regler for den mundtlige prøve?
- Hvordan forbereder jeg mig bedst muligt hjemmefra til mundtlig eksamen?
- Hvordan bruger jeg bedst forberedelsestiden efter at have trukket spørgsmålet?
- Hvordan skal jeg tilrettelægge min fremlægning af det faglige emne?

Man kan næppe nå et behandle alt dette i løbet af en enkelt værkstedstime; noget af det må tages op i den efterfølgende matematikundervisning.

Timens forløb kunne fx være:
- Pararbejde om et eksamensspørgsmål (gerne mindre end de rigtige eksamensspørgsmål, så det ikke tager for lang tid), som kursisterne har forberedt sig på hjemmefra. Man gennemgår hver sin del af spørgsmålet for hinanden.
- Kort prøveeksamen. Læreren eksaminerer en kursist, mens de andre ser på og gør sig deres overvejelser.
- Fælles diskussion af forløbet og af, hvad man bedst kan gøre i eksamenssituationen.

Eksempel 161**:**

Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst

Din bog er ikke din egen, men udlånt fra skolen. Derfor kan du hverken understrege de vigtige ting i en tekst eller tilføje argumenter og mellemregninger, hvor det er nødvendigt. Men selvom det var din egen bog , ville det være nødvendigt at tage notater i tilknytning til læsningen. Fx fordi understregninger ofte kræver kommentarer eller uddybninger, der er mere omfattende end bogens margin tillader.

Trin 1: Forhåndsforståelse. Hvad handler teksten om? Hvad ved jeg om emnet i forvejen? Handler teksten om det, er foregik i undervisningen (Brug notater fra sidste lektion)?

Trin 2: Overblik . Hvilken type tekster består teksten af?
Lærestof: eksempel, sætning, bevis, anvendelse?
Læsestof: Introduktion til et emne, en definition, en sætning eller et bevis? Perspektiverende tekst?

Trin 3: Indlæring**.** Afhængig af teksttype:

Teksttype 1: Eksempel**:** Læs problemstillingen. Tegn, hvis det er muligt. Hvad er givet, hvad skal findes? Opfat eksemplet som en udvidet facitliste til en opgave, der skal løses.
Prøv at løse problemet selv!
Hvis du kunne løse problemet, sammenlign med tekstens løsning.
Hvis du ikke kunne løse problemet, begynd læsningen. MED PAPIR OG BLYANT. Hvis teksten beskriver en figur, så tegn figuren ud fra teksten. Sammenlign med tekstens tegning.
Kan du nu løse problemet alene?
Hvis ikke, så læs videre – skriv hvert skridt ned. Tilføj mellemregninger. Argumenter for hvert skridt i løsningsprocessen. Prøv hele tiden at gå videre med løsningen uden at se i bogen.
Når du er kommet til vejs ende, skal du
- Gøre dig klart, om der var problemer (fx begrundelser), som du ikke kunne finde ud af.
- Formulere hvert enkelt problem så præcist som muligt, skriv præcist ned, hvor problemet dukker op i teksten.
Repetere: Hvad var problemstillingen? Kan du gennemgå løsningen uden at kigge i teksten? Først når du er i stand til dette, har du tilegnet dig **lærestoffet** !

Teksttype 2: Sætning, regel, formel/bevis:
Hvad siger sætningen, reglen, formlen? Hvordan bruges den? Tag dine notater fra undervisningen til hjælp. Blev beviset gennemgået i klassen? Har du udført beviset i klassen? Prøv, om du kan gennemføre beviset uden at støtte dig til teksten. Hvis du ikke kan det, så gå frem som ovenfor under Eksempel.

Du har først tilegnet dig lærestoffet, når du er i stand til at gennemgå beviset uden at støtte dig til teksten.
Når du er nået til vejs ende, skal du efterbehandle arbejdet:
Hvad var givet, hvad skulle bevises?
Hvad var hoved-ideen i beviset?
Var der problemer med begrundelserne? Hvor præcist opstod de? Skriv ned, og formuler så præcist som muligt, hvad problemet var.

Eksempel på spørgsmål til en lektie i matematik

Øvelse 1. Tekst: Lærebog, indledende afsnit om: Geometri
Besvar spørgsmålene i TRIN 1 og TRIN 2 i opskriften ovenfor.
I dine notater skulle der gerne være svar på følgende spørgsmål:
Hvad betyder ordet geometri?
Hvorfor er det nødvendigt at måle og veje?
Hvorfra og fra hvornår stammer de ældste vidnesbyrd om arbejde med geometri? Hvilken form for geometri var der tale om?
Hvornår begyndte man at begrunde metodernes rigtighed?
Hvordan lyder formlen for en trekants areal?
Hvordan finder man arealet af en firkant?
Hvad er en spids vinkel? En stump vinkel?
Tegn en trekant og kald den PQR. Hvordan betegnes trekantens sider?
Tegn en grundlinje og den tilsvarende højde i en trekant.
Hvad er et trapez?
Hvad siger Pythagoras' sætning for trekant PQR, $P=90^o$?
Hvad siger Pythagoras' omvendte sætning?

Øvelse 2: Tekst: Lærebog om Geometri og trigonometri, side ... (afsnit om sætninger og beviser).
Besvar spørgsmålene vedrørende lærestof i opskriften ovenfor. Anvend TRIN 3, teksttype, og besvar spørgsmålene her.
Dine studienotater skulle gerne indeholde svar på spørgsmål som følgende:
Hvor står den sætning, teksten handler om? Hvor begynder beviset – hvor slutter det?
Hvilke mellemregninger, som ikke er anført i bogen, havde du svært ved at forstå?
Ud af beviset træder der en bonus frem: En ny formel for arealet af en trekant. Hvad siger formlen?
Side ... : Teksten er *lærestof*. Den består af øvelser og eksempler.
Anvend TRIN 3, teksttype 1. Besvar spørgsmålene her.
Dine notater skulle gerne indeholde svar på følgende spørgsmål:
I bogens bevis er der en indskrænkning, et forbehold. Øvelse ... handler om dette forbehold? Hvad er forholdet i det gennemførte bevis?
Hvilket problem skal løses i eksempel ...? Prøv at løse problemet, før du læser i bogen.
Øvelse ... er egentlig et eksempel: Det *lumske tilfælde*.
Hvad er det lumske ved problemet? Hvad kendetegner det lumske tilfælde?
Løs problemet i sidste linje i eksemplet.

Eksempel 201:
Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge

Forløbet består af en række øvelser med vækstmodeller inden for forskellige anvendelsesområder. Indenfor kernestoffet på C-niveauet beskæftiger det sig især med de følgende to områder:

– formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable
– xy-plot af datamateriale samt karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge samt anvendelse af regression.

Indenfor de faglige mål sigter forløbet især på de følgende overordnede mål:

– håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold
– anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig reflekterende til disse samt til rækkevidde af modellerne

Men dertil kommer også væsentlige bidrag til de følgende to mål:

– demonstrere viden om matematikanvendelse samt eksempler på matematikkens samspil med den øvrige videnskabelige og kulturhistoriske udvikling.
– anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau
Materialet er udarbejdet med tanke på matematik i grundforløbet (C-niveau). Dele af materialet kan dog også indgå på højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder
Temaet om idræt lægger op til tværfagligt samarbejde med idræt og evt. fysik. Temaet om kropsvægt og andre biologiske størrelser hos pattedyr, samt nedbrydning af rusmidler lægger tilsvarende op til et tværfagligt samarbejde med biologi. Herudover er der oplagte samarbejdsmuligheder med f.eks. det naturvidenskabelige grundforløb om modellering af simple eksperimenter i de naturvidenskabelige fag.

Timeforbrug
Tema om idræt: 10 timer, tema om kropsvægt: 10 timer, tema om rusmidler: 6 timer.

Arbejdsformer
Hovedsagelig øvelsesregning i grupper. Temaet om idræt rummer en del selvstændig elevaktivitet med indsamling af data.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer.
Gode muligheder. Vejledning til relevante aspekter af udvalgte værktøjer – regneark, CAS-programmer og grafregnere – er inkluderet i særskilte afsnit. Brugen af sådanne hjælpemidler er påkrævet for at få det fulde udbytte af undervisningsforløbet. Forløbet kan udmærket gennemføres alene med PC-værktøjsprogram, f.eks. et regneark som Excel. Råder klassen over grafiske lommeregnere, f.eks. TI-84, er det også muligt at gennemføre forløbet alene med støtte fra disse.

Undervisningsmaterialer / er det tilgængelige lærermaterialer eller elevmaterialer?
Hæftet ”Vækst”, som er placeret på fagets side på emu’en Forløbet kan baseres udelukkende på dette hæfte.

Eksempel 202:
Hverdagsøkonomi: skatteberegning

I dette projektforløb får kursisterne/eleverne lejlighed til at anvende dele af kernestoffet på autentiske hverdagsproblemer. Bl.a. vil den elementære procentregning blive perspektiveret.

Mål:
At opsøge information og formidle viden om matematikanvendelser inden for dagligliv og samfundsliv.
Afhængigt af, hvad de enkelte projektgrupper vælger at arbejde med (eller hvilke krav læreren stiller til arbejdet), vil kursisterne/eleverne blive trænet i at håndtere simple formler og variabelsammenhænge og eventuelt anvendelse af it-værktøjer.

Niveau: Projektet egner sig især til C-niveau på hf, hvor det tilgodeser et af kravene til supplerende stof, og til grundforløbet i gymnasiet.

Arbejdsform: Projektarbejde med skriftlig grupperapport. Et muligt oplæg til klassen/holdet er gengivet nedenfor. Det er nærliggende at lade anvendelse af it-programmer, bl.a. et regneark, indgå i projektarbejdet.

Oplæg til kursisterne/eleverne:

Matematikprojekt: skatteberegning

Projektarbejdet skal omfatte: Problemformulering, informationssøgning, bearbejdning af materialet, rapportskrivning. Problemformuleringen skal godkendes af læreren.

Rapporten skal indeholde: problemformuleringen, forklarende tekst om beregning af skat, beregninger med forklaring (og også gerne grafer, evt. med brug af regneark).

I skal udnytte jeres viden om procent- og rentesregning, om lineær sammenhæng og/eller om brug af regneark.

Projektarbejdet udføres i grupper på 3-4 personer.

Et par ideer til problemformuleringen:
- Hvordan udregner man sin forskudsskat?
- Hvordan afhænger skatten af, hvor meget man tjener?
- Hvad er bundskat, mellemskat og topskat, hvordan beregnes de, og hvilken betydning har de?

Told og skat har hjemmesiden www.toldskat.dk.

Eksempel 205:

Tak for kaffe - Et forløb om lineær og eksponentiel regression.

Materialet er skrevet i to dele og disse kan læses uafhængig af hinanden.
Forløbets første del tager udgangspunkt i opvarmning af vand med en hjemmelavet dyppekoger eller en måling på temperatur-ændringer under en reaktion. Der måles en sammenhæng mellem tid og temperatur og måleresultaterne indtastes i et regneark. Der tegnes x-y-plot og der indlægges bedste rette linje gennem punkterne.
I anden del af forløbet afkøles vandet igen og der måles igen sammenhæng mellem tid og temperatur. Man beregner forskellen på temperaturen af vandet og omgivelserne og der tegnes en graf med tiden på x-aksen og temperaturforskellen på y-aksen. Der laves eksponentiel regression i Excel.
Undervisningsmaterialet indeholder

- elevmateriale
- tastevejledninger til Excel
- lærervejledning

Niveau: Grundforløbet.

Samarbejde: Forløbet kan gennemføres i et samarbejde med eksperimentelle fag.

Timeforbrug: 10 – 15 timer.

Arbejdsformer: Forløbet skal afvikles som gruppearbejde. Forløbet er opbygget omkring eksperimenter – opvarmning og afkøling af vand. Det meste af forløbet kræver, at eleverne arbejder ved en computer.

IT Forløbet er skrevet til Excel, men kan rimelig let oversættes til OpenOffice eller anden tilsvarende program med regneark.

Undervisningsmaterialet kan hentes på fagets side på emu'en

Eksempel 209:

Kriminaliteten i tal – et forløb i statistik

- et forløb der er velegnet til samarbejde med samfundsfag

Emnet:
Der eksisterer en masse tilgængelig statistik om kriminalitet som er velegnet til arbejde med procentregning, fremskrivningsfaktor, indekstal og deskriptiv statistik. Man kan arbejde med arten og omfanget af kriminaliteten i Danmark, fordelingen af kriminaliteten på køn, alder, uddannelse og fordelingen på regioner og by- og landområder. F.eks. kan man bruge indekstalberegninger til at se på om voldsforbrydelser er steget mere end berigelsesforbrydelser og om kvinders kriminalitet er steget mere end mænds. Man kan indsamle og bearbejde egne data og anvende Excels muligheder til at lave krydstabeller (pivot-tabeller) og til at udregne forskellige statistiske deskriptorer. Spørgeskemaundersøgelsen kunne dreje sig om gråzone-kriminalitet – uden tilladelse at tage penge eller spiritus fra forældre eller kammerater, uden tilladelse låne en cykel, arbejde sort, i ophidselse slå hårdt til en jævnaldrende osv.

Formål:

- give en statistisk behandling af et talmateriale og kunne formidle konklusioner i et klart sprog
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau:
Emnet kan indgå i tidligt i forløbet, både i et grundforløb og i en 1. hf, men stoffet kan også behandles så det indgår på højere niveauer

Samarbejdsmuligheder:
Det er oplagt at samarbejde med samfundsfag, hvis kernestof indeholder sociologi og kriminalitet er et sociologisk emne som man ofte tager op. Inden samarbejdet med matematik etableres kan man i samfundsfag have gennemgået grundlæggende sociologiske begreber, primær og sekundær socialisation, roller og normer, imitation – identifikation, identitetsdannelse og årsager til kriminalitet.

Timeforbrug:
Arbejdet med tabeller og tal vil nok tage 8-10 timer, og en empirisk undersøgelse med efterbearbejdning nogenlunde det samme.

Arbejdsformer:
I den indledende del vil traditionel lærergennemgang vekslende med øvelser være bedst og senere i talbearbejdelsen og spørgeskemaprojektet vil gruppearbejde være det mest optimale.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
En hel del af det tilgængelige datamateriale om kriminalitet findes som Excel-filer. Meget af arbejdet vil derfor kræve anvendelse at it. Man vil stort set kunne klare sig med alle slags lommeregnere.

Undervisningsmateriale:
Gængse lærebøger om deskriptiv statistik.
Samfundsfag/Den digitale håndbog til samfundsfag – udgives i opdateret udgave hvert år ved juletid. Forlag Columbus.
www.statistikbanken.dk

Politiets årstabel findes på siden http://www.politi.dk/da/servicemenu/forside/
Per Vejrup-Hansen, Statistik med Excel, Samfundslitteratur.
Per Vejrup-Hansen**:** "Excel som spørgeskemaprogram (stikprøver)", regnearksskabelon, findes på fagets side på emu'en

Eksempel 209a:
Hvad er meningen? – et forløb om opinionsmålinger

Emne Statistik.

Beskrivelse ”Hvad er meningen” er et forløb man med simuleringer på regneark undersøger binomialfordelingen.
Forløbet tager udgangspunkt i en opinionsundersøgelse – Gallups politiske indeks – og hovedspørgsmålet er, hvor sikker man kan være på oplysningerne.
En opinionsundersøgelse sammenlignes med kast med terninger, der laves mange eksperimenter med kast med 12 terninger og der indføres et regneark, som kan simulere disse eksperimenter. Eksperimenterne med kast med terninger overføres til en opinionsundersøgelse. Med regneark kan man meget hurtigt producere 1000 eksperimenter og tegne histogrammet for fordelingen. Fordelingen sammenlignes med en binomialfordeling og formlerne for middelværdi og spredning foræres. Til sidst indføres sikkerhedsintervallet for en opinionsundersøgelse.
Undervisningsmaterialet indeholder

- elevmateriale
- tastevejledninger til Excel

Niveau Matematik C og B.

Samarbejde Forløbet er velegnet til samarbejde med samfundsfag.

Timeforbrug 10 – 15 timer.

Arbejdsformer Forløbet skal afvikles som gruppearbejde. Det meste af forløbet kræver, at eleverne arbejder ved en computer.

IT Forløbet er skrevet til Excel, men kan rimelig let oversættes til OpenOffice eller anden tilsvarende program med regneark.

Undervisningsmaterialet kan hentes på fagets side på emu’en

Eksempel 221:

Stikprøver og databaser

- et forløb indenfor emnet statistik

'Stikprøver og databaser' er et forløb, der introducerer Explorative Data Analysis (EDA) til analyse af spørgeskemaer og stikprøver fra fx databaser. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale enten frembragt af eleverne selv, fx via en spørgeskemaundersøgelse, eller hentet på nettet i en passende database. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis og der udpeges/undersøges mulige variabelsammenhænge. Forløbet kan eventuelt udvides med en undersøgelse af vigtige statistiske egenskaber for stikprøver i en sådan database.

Mål:
- anvende simple statistiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale, kunne stille spørgsmål ud fra modellen, have blik for, hvilke svar der kan forventes, og være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Projektet egner sig til både til grundforløbet og til højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan fint indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse af datasæt. Det vil også afhængigt af det valgte tema kunne indgå i almen studieforberedelse.

Arbejdsformer og timeforbrug: 8×45 minutter
Klassen introduceres til de begreber og metoder der er karakteristiske for EDA, dvs. specielt de karakteristiske grafiske værktøjer som fx XY-punktgrafer, kassegrafer og histogrammer til opdagelse af karakteristiske mønstre og sammenhænge, men også til simple kvantitative mål som middelværdier, medianer og kvartiler. Derefter stilles et spørgeskema eller en database til elevernes rådighed for den følgende analyse. Man kan fx udnytte at man på mange skoler som led i en indledende snak med klassen om deres forudsætninger og forventninger indleder skoleåret med en spørgeskemaundersøgelse af elevernes fritidsvaner, lektievaner, forventninger til gymnasiet osv. Hvis disse data opsamles elektronisk kan de nemt konverteres til en fælles database, hvor oplysningerne om eleverne fremstår i en passende anonymiseret form. Eleverne kan derefter udvælge forskellige størrelser (variable) med henblik på en afklaring af hvilke andre variable, der kan tænkes at påvirke eller blive påvirket af den givne størrelse ligesom man kan undersøge om der er forskel mellem forskellige grupper, om der er størrelser, der varierer sammen osv. Undersøgelsen kan munde ud i en skriftlig rapport om de fundne sammenhænge, hvor der sættes ord på tolkningen af graferne, ligesom den kan munde ud i en mundtlig fremlæggelse/diskussion med klassen af de sammenhænge, man mener at have påvist.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at bruge det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel eller statistik- og modelleringsprogrammet Fathom.

Undervisningsmaterialer: Man kan finde eksempler på en sådan tilgang til spørgeskemaanalyser i hæftet: Spørgeskemaanalyser. I dette hæfte refereres til en stor tysk spørgeskemaundersøgelse af gymnasieelevers fritidsvaner Muffins, der er tilgængelig på nettet.
På nettet findes desuden adskillige diskussioner af Explorative Data Analysis. Fx kan man finde en detaljeret gennemgang EDA fra en naturvidenskabelig synsvinkel i kapitel 1 af håndbogen 'Engine-

ering Statistics Handbook', der frit kan downloades fra nettet stillet til rådighed af det amerikanske National Bureau of Standards.

Eksempel 224:

Velfærdssamfundet og befolkningsudvikling i Danmark

- et samarbejde mellem matematik og samfundsfag

Emnet:
I debatten om velfærdssamfundets udvikling nævnes udviklingen i befolkningssammensætningen ofte som en af de store udfordringer som velfærdssamfundet står over for. Fremskrivninger af befolkningstallene tyder på at der i om 20 – 40 år vil være langt flere passivt forsørgede (børn og unge under uddannelse og ældre på pension) i forhold til antal erhvervsaktive end i dag. Diskussionen kan få stor betydning for de politiske beslutninger som tages vedrørende udviklingen af velfærdssamfundet, og der er god grund til at interessere sig for disse prognosemodeller og deres holdbarhed i matematikundervisningen. Og mulighederne er mange. Man kan arbejde med selve modelaspektet (regner man 40 år ud i fremtiden regner man på en stor gruppe som end ikke er født endnu) og med fremskrivningsfaktor (eksponentialfunktion). Inddrager man Dream-model-gruppens arbejde (som velfærdskommissionen bl.a. bruger) kan man arbejde med estimering af koefficienter (regression), med differentialligninger og sandsynlighedsregning alt afhængig af hvilket niveau man har og hvor langt man er kommet i forløbet.

Formål:
- kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold
- anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger

Niveau:
B- eller A-niveau afhængig af hvad man vælger at fokusere på.

Samarbejdsmuligheder:
Undervisningsforløbet kan med fordel tilrettelægges i et samarbejde med samfundsfag på en studieretning. Velfærdssamfundet og udfordringerne for velfærds-samfundet er et emne som gennemgås på begge niveauer. Men forløbet kan også være et tema i almen studieforberedelse, hvor den historiske baggrund for udviklingen af det danske velfærdssamfund i 1900-tallet gennemgås i historie, dansk og hvor matematik inddrages.

Indhold:
Matematik: Eventuelt beregning af personskat i Excel. En model for en virksomhed. Selskabsskatter, moms og virksomhedsadfærd. Virksomhedens produktions-funktion, grønne afgifter. (Nikolaj Malchow-Møller :"Matematik og økonomi", kapitel 2 og 3 (eventuelt kun til s.45) samt opgaver til kapitlerne).
Samfundsfag: Velfærdsmodeller. Velfærdsstaten under pres. De forskellige former for skat. Gruppearbejde med **Finansminister-spillet.** Lafferkurven og artiklen : "Afgiftspolitik: Danmark i top med grønne afgifter"
Fælles: Diskussion/tolkning af resultaterne af modelberegningerne.
Evaluering af forløbet. Et afsluttende selvstændigt gruppearbejde/projekt, hvor begge fag indgår og som bedømmes i begge fag.

Timeforbrug:
Der vil være meget stor forskel på hvor lang tid et forløb kan tage – fra 5 til 20 timer afhængig af valget af de matematiske emner.

Arbejdsformer:
Lærerstyret gruppearbejde og mere selvstændigt projektarbejde.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
Excel regneark og almindelige grafregnere.

Undervisningsmateriale:
Gængse lærebøger i matematik.
Samfundsfag/Den digitale håndbog til samfundsfag – udgives i opdateret udgave hvert år ved juletid. Forlag Columbus.
www.statistikbanken.dk
www.dreammodel.dk
Jørn Henrik Petersen og Jesper Jespersen: Velfærdsstat og fordeling mellem generationer fra ”13 udfordringer til den danske velfærdsstat”, redigeret af Jørn Henrik Petersen og Klaus Petersen, Syddansk Universitetsforlag.

Eksempel 280:

Sammenligning af to måleserier

- et eksempel på et forløb indenfor emnet statistik

'Sammenligning af to måleserier' er et eksperimentelt projekt, der handler om deskriptiv statistik udbygget med en simpel hypotesetest. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale, fx en undersøgelse af elevernes reaktionstider. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis. Herunder bør man diskutere middelværdi og median, samt diskutere deres fordele og ulemper. Denne første del er rent deskriptiv og kan fx munde ud i kåringen af klassens hurtigste elev. I projektets anden del skal klassen sammenligne to måleserier, fx for at afgøre om der er forskel på piger og drenges reaktionstid. Klassen diskuterer i fællesskab mulige teststørrelser, og der vælges en bestemt teststørrelse, fx forskellen mellem medianerne for de to grupper. Scramblings-metoden introduceres, fx via et historisk datamateriale, hvorefter måleserierne scrambles, og man finder eksperimentelt fordelingen for teststørrelsen. Dette kan med fordel først gøres i hånden (hvor man samler klassens resultater, idet hver elev fx håndscrambler 4 gange ved at blande kort med de observerede værdier) og derefter på maskine. Derefter diskuteres det i fællesskab, om den observerede forskel er rimeligt sandsynlig eller højst usandsynlig (eller midt imellem), og hvad konklusionen bliver.

Mål: at tilgodese kravet om, at eleverne skal kunne arbejde med – simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, simple empiriske statistiske deskriptorer.

Niveau: Projektet egner sig til grundforløbet. Der er muligheder for senere at vende tilbage til eksperimentet på de højere niveauer i forbindelse med mere avancerede overvejelser om hypotesetest med baggrund i teoretisk sandsynlighedsregning. Fx kan scramblings-metoden sammenlignes med kanoniske tests som det parametriske t-test eller det ikke-parametriske Mann-Witney test.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse og test af datasæt.

Arbejdsformer og timeforbrug: 6×45 minutter
Eksperimentet med den deskriptive del tager typisk en dobbelttime, men kan sagtens udvides med en mere generel undersøgelse af fx middelværdien og medianen. Hypotesetesten kræver tilsvarende som minimum en dobbelttime med introduktion af scramblingsmetoden, samt elevernes gennemgang af deres egne måleserier. Dertil kommer efterbehandlingen af elevernes resultater.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at skrive rapport om såvel eksperiment som hypotesetest med brug af det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel, statistik- og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. Det er ikke alle programmer, der er født med en scramblings-kommando (der kan udføre en tilfældig permutation af en liste), men de kan udvides med små programmer, der klarer denne del af sagen. Grafiske lommeregnere kan glimrende bruges til den deskriptive del, men vil være for langsom til omfattende realistiske scramblinger.

Undervisningsmaterialer: Eksperimentet om reaktionstid med tilhørende elevinstruktion er beskrevet i detaljer i hæftet 'Hvem er den hurtigste'. Et tilsvarende historisk eksempel er gennemgået i hæftet: 'Challenger ulykken'. Der er tale om lærermaterialer med diskussion af begreber og metoder. Man kan efter behov supplere med noter om elementær deskriptiv statistik omhandlende medianer, kvartiler, boksplots mm.

Eksempel 281:
Simpsons paradoks
- et emneforløb i statistik om sammenhænge og skjulte variable.

Formål:
At give eleverne et kritisk beredskab over for påstande om kausale sammenhænge gennem en undersøgelse og en diskussion af begrebet falsk sammenhæng (konfundering). At diskutere afhængighed og uafhængighed (henholdsvis rent stokastisk uafhængighed og betinget uafhængighed).

Indhold og forløb:
Simpsons paradoks fortæller den umiddelbart overraskende historie, at såfremt to hospitaler tilbyder deres patienter to forskellige slags behandlinger A og B af samme sygdom, og det for begge hospitaler gælder at behandlingsform A er den mest effektive, så kan resultatet når man lægger tallene sammen godt være, at behandlingsform B er den bedste. Paradokset er dermed eksemplarisk til at sætte fokus på problemet med skjulte variable.

Der arbejdes i grupper med analyse af en række autentiske og opdigtede avisnotitser. Eleverne prøver også selv at opdigte nye.
Gennem arbejdet med eksemplerne søger eleverne efter svar på spørgsmål som:

- Hvordan inddrager man baggrundsvariable i den statistiske analyse
- Hvad er relevante baggrundsvariable
- Hvornår må man se bort fra en baggrundsvariabel.

I visse tilfælde kan almindelig sund fornuft fortælle én, at en bestemt baggrundsvariabel ikke kan influere på undersøgelsen, eller omvendt at en ikke medtaget variabel må have stor indflydelse. Men i enhver undersøgelse er der mange mulige baggrundsvariable, og man kan ikke altid forudse, hvad man kan se bort fra. Et samarbejde med andre fag kan give bedre grund under fødderne i nogle sammenhænge.

Der kan laves øvelser i at opstille skemaer over alle tænkelige baggrundsvariable, som man burde opdele en analyse af et materiale efter.
Dette kan evt. kobles sammen med en forberedelse til indsamling af et autentisk materiale via eksperimenter eller spørgeskemaer: Hvordan tilrettelægges sådanne undersøgelser? Hvorfor er det vigtigt at foretage sådanne analyser før materialet indsamles?
Er der stærkt belæg for en hypotese om sammenhæng vil en regressionsanalyse af og til kunne bidrage til analysen og afsløre, at der er andet på spil. Men hvad dette andet er, vil ofte kræve en indsigt, andre fag kan bidrage med.

Efter de indledende diskussioner kan man også vælge at koncentrere sig om et beslægtet forløb: En undersøgelse af om det er korrekt, at nedsat fødselshyppighed fører til, at brødre og søstre bliver sjældne væsner?

Produktet:
Kan være elevernes egne opdigtede – eller i aviserne fundne – notitser om tilsyneladende sammenhænge. Præsenteres fx via posters, sammen med kommentarer om kvaliteten af statistiske undersøgelæser og konklusioner.

Materialer:
På fagets side på emu'en ligger et notemateriale, som kan anvendes som grundlag for forløbet.

Eksempel 283:
Kan man smage forskel?
- et samarbejde mellem matematik og biologi

Emnet:
Hypotesetests er et emne, der kan være svært at forstå for eleverne, hvis ikke der gives en hel masse eksempler. Med de moderne CAS værktøjer forsvinder det beregningsmæssige arbejde, og eleverne kan i stedet koncentrere sig om at jonglere med for eksempel hypotese, P-værdi og signifikansniveau.

Niveau:
Matematik A-niveau og Matematik B-niveau.

Samarbejdsmuligheder:
Biologi C-, B- eller A-niveau. Der findes eksempler indenfor kernestoffet på alle tre niveauer.

Timeforbrug:
Eleverne skal på forhånd have stiftet bekendtskab med sandsynlighedsregning og have lavet nogle øvelser i biologi. Hypotesetests med eksempler: 15 timer.

Forløb og arbejdsformer:
I den indledende del af forløbet vil lærerstyret gennemgang af begreberne være fordelagtigt. Senere i forløbet bør eleverne arbejde i grupper. Man kunne fx starte med at anvende og diskutere en såkaldt *triangel-test*. Med denne svares på spørgsmål som: Er det muligt at smage forskel på Carlsberg og Tuborg, eller to forskellige cola-typer. Denne test er meget brugt ved levnedsmiddelundersøgelser.
Hver deltager får udleveret tre kodede prøver, hvoraf to er ens og en er forskellig fra de andre (dvs. to glas med det ene og ét glas med det andet. Efter at have smagt på prøverne skal hver person udpege den prøve, der er forskellig fra de to andre prøver.
Eksperimentet kan beskrives med en *binomial*-model, hvor der indføres en stokastisk variabel X, som angiver antal rigtige svar. Vi antager, at X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynligheds-parameter p, og opstiller den *hypotese*, at der ingen forskel er på de to produkter, dvs. at sandsynlighedsparameteren p i binomialfordelingen er $\frac{1}{3}$.
Kan vi på basis af vore observationer tro på hypotesen? Eller: vil vi acceptere eller forkaste hypotesen.
Hvis hypotesen skulle være sand, ville vi forvente en observeret værdi af X på $n \cdot \frac{1}{3}$.
Vi vil forsøge at afgøre, om den observerede værdi af X ser sandsynlig ud i dette lys.
Dette gøres ved at finde *p-værdien* eller *testsandsynligheden*, der angiver sandsynligheden for at observere noget, der er mere eller lige så ”ekstremt” som det, vi rent faktisk observerede, under forudsætning af, at hypotesen er sand.
Hvis *p-værdien* er lille, tror vi ikke på hypotesen. Hypotesen forkastes.
Hvis *p-værdien* er stor, tror vi på hypotesen. Hypotesen accepteres.
Grænsen sættes typisk ved 0,05 = 5%.
Et kort forløb kan afsluttes med elevundersøgelse af tilsvarende fænomener, hvor de selv formulerer spørgsmål og opstiller hypoteser.
I et længere forløb kan man vælge at fordybe sig yderligere i hypotesetest og inddrage eksperimentelle metoder.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
Grafregneren eller CAS-værktøjer benyttes til beregning af løsningerne. Excel kan med lidt øvelse lave test. FATHOM er et godt program, der både laver de statistiske tests og grafer, og tillader eleverne at simulere tusinder af observationer, så de grafisk kan se, hvor deres eget forsøgsresultat ligger i forhold til helt tilfældige observationer. Det giver en god fornemmelse for begrebet signifikansniveau.

Undervisningsmaterialer:
Inspiration kan hentes i materialet: *Hypotesetests i biologi*, samt *Kan man smage forskel – et eksempel på triangeltest* på fagets side på emu'en.

Eksempel 293:
Vækstmodeller og differentialregning

Forløbet samler vækst og differentialregning. Det forudsætter, at klassen/holdet har gennemarbejdet forskellige typer af funktioner og differentialregning.

Mål
Målet er at give eleverne/kursisterne en opsamlende og sammenhængende forståelse for vækst og dermed differentialregning.

Niveau
Forløbet er for B-niveau på hf og i gymnasiet.

Samarbejdsmuligheder
Forløbet vil ved at inkorporere relevante eksempler kunne gennemføres i samarbejde med naturvidenskabelige fag eller med samfundsfag.

Arbejdsformer
Forløbet gennemføres som projekt- eller emneforløb med gruppearbejde og afsluttende med en rapport.

Timeforbrug
Timeforbruget i matematik vil være ca. 4 klokketimer.

Indhold
Vækstmodeller:
1. Beskriv, hvordan differentialkvotienter kan anvendes til at beskrive karakteristiske træk ved væksttyperne omtalt nedenfor.
2. Hvad kan man slutte om en funktion og om det grafiske forløb ud fra kendskab til den afledede funktion? Opstil selv nogle forskellige antagelser om den afledede og prøv at ræsonnere dig til egenskaber ved funktionen.
Lineær vækst
Eksempel
I perioden 1991 – 2002 kan antallet af dankortbetalinger i Danmark med god tilnærmelse beskrives ved hjælp af funktionen $f(x)=33x+109$, hvor x er antal år efter 1991, mens *f(x)* beskriver antal af dankortbetalinger i millioner.
(Kilde: Eksamensopgave hf fællesfag aug. 2004)
Eksponentiel vækst
Eksempel
Koncentrationen af en type medicin i blodet hos en patient kan beskrives ved funktionen $f(x)=11{,}5\cdot 0{,}8453^{x}$, hvor x er antal timer efter indsprøjtning, og *f(x)* er koncentrationen af medicinen i blodet i milligram pr. liter.
(Kilde: Eksamensopgave hf fællesfag aug. 2002)
Potensvækst
Eksempel
Antallet arter af krybdyr kan i et område beskrives ved funktionen $f(x)=3\cdot x^{0{,}305}$, hvor x står for kvadratkilometer, og *f(x)* står for antal arter af krybdyr.

Logistisk vækst
Eksempel

Salget af en modevare i Europa kan beskrives ved funktionen $f(t)=\dfrac{160}{1+180.000\cdot e^{-0{,}8t}}$, hvor t er antal måneder efter varen er kommet i handlen, mens $f(t)$ er antal solgte varer i tusinder.

Eksempel 302:
Statistik, formidling og medier
- et samarbejde mellem matematik og dansk, evt. i almen studieforberedelse

Emne:
Bag mange af mediernes informationer ligger statistisk materiale (f.eks. i opinionsundersøgelser, når talen er om trafikofre eller ledighedstal, ja, sågar i vejrudsigten). Hvordan formidles dette materiale i den videnskabelige offentlighed og i den brede offentlighed, og hvad sker i transformationen fra statistik til nyhedsindslag? Har man som udenforstående en chance for at kunne gennemskue om det statistiske argument er lødigt? Hvad får man ud af statistisk materiale? Hvad kan man konkludere? Hvordan kan man formidle et sådant materiale, så man både respekterer de statistiske kendsgerninger og forbehold og de journalistiske krav?

Formål: At sætte fokus på hvorledes man stiller spørgsmål til og henter svar fra et statistisk materiale, samt hvorledes man formidler en viden herom.

Niveau
Forløbet er for både B og C-niveau på hf og i gymnasiet.

Samarbejdsmuligheder
Forløbet vil kunne tilrettelægges i samarbejde med dansk, hvor eleverne/kursisterne i dansk kan formulere mindre artikler undervejs.

Arbejdsformer
Gruppearbejde.

Timeforbrug
Timeforbruget i matematik vil være 3-4 klokketimer. Hertil kommer timer i dansk.

Undervisningsmaterialer
På fagets side på emu'en ligger forslag til konkret opgave. Man kan dog lige så vel hente aktuelt materiale fra medierne, eller lade sig inspirere af materialet om stikprøver på fagets side på emu'en.

Eksempel 403:
(For yderligere materiale om eksamen henvises til matematiks side på emu'en på adressen: http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsministeriet/eksamen.html)

Liste over gennemførte forløb. Hf B-niveau. Eksempel

1.	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
...	

Gennemførte undervisningsforløb (til brug for læreren) B-niveau.												
Forløb →	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Faglige mål 2.1 ↓												
Variable												
Statistik												
f(x) og modellering												
f '(x) og $\int f(x)dx$												
Geometriske modeller												
Ræsonnement og bevisførelse												
Anvendelse af matematik												
It												
Supplerende stof 2.3												
Ræsonnement og bevis												
Modeller												
Statistiske modeller												