Matematik B - HfE

Vejledning / Råd og vink

Gymnasieafdelingen 2010

Alle bestemmelser, der er bindende for undervisningen og prøverne i de gymnasiale uddannelser, findes i uddannelseslovene og de tilhørende bekendtgørelser, herunder læreplanerne. Denne Vejledning/Råd og vink indeholder forklarende kommentarer til nogle af disse bestemmelser, men indfører ikke nye bindende krav. Desuden gives eksempler på god praksis samt anbefalinger og inspiration, og den udgør dermed et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse.

Indholdsfortegnelse

0. Introduktion

Undervisningsvejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens forskellige punkter samt en række råd og vink til tilrettelæggelsen af undervisningen. Citater fra læreplanen er angivet med citationstegn.

Det er lærerens ansvar at tilrettelægge en undervisning, der giver kursisterne mulighed for at opfylde kravene i læreplanen. Dette ansvar kan ikke overlades til en given lærebog. Læreren skal kende læreplanen i alle detaljer og skal selv træffe en række beslutninger om, hvordan de forskellige punkter udmøntes på netop dette hold på netop denne studieretning.

På fagets side på emu'en, www.mat.dk, og på siden www.uvmat.dk ligger materialer, der frit kan anvendes, og som rummer forslag til forløb og noter inden for alle faglige områder, ideer til større skriftlige opgaver, inspiration til mundtlige eksamensspørgsmål, vejledning til udformning af skriftlige opgaver og projekter samt meget andet.

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret *de faglige mål*, som kursisterne skal nå i undervisningen i matematik B. De faglige mål er grundlag for både skriftlig og mundtlig eksamen. De faglige mål udmøntes gennem undervisningen, dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3.

I læreplanens afsnit 3 om tilrettelæggelse er formuleret en række krav til tilrettelæggelse af undervisningen, der alle tager sigte på, at kursisterne gennem forskellige arbejdsformer skal opnå en dybere forståelse af, hvad matematik er, hvordan matematik anvendes, og hvorledes matematik gennem et samspil med andre fag kan bidrage til en behandling af givne problemer, og til at man vinder ny indsigt. Der er i afsnittet lagt stor vægt på kursisternes selvstændige arbejde med stoffet.

0.1 Niveauerne

Matematikfaget optræder på hf på to niveauer:

- Et almendannende C-niveau, der skal give alle kursister bedre muligheder for at forstå og forholde sig til problemstillinger fra omverdenen, i andre fag, fra samfundsdebat eller privatliv.
- Et B-niveau med hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik med sigte på at opnå kompetencer til at kunne gennemføre videregående uddannelser, hvor matematik indgår.

De enkelte niveauers karakteristika afspejles i undervisningens tilrettelæggelse.

1. Fagets identitet og metoder

Hf's profil er anvendelsesorientering, og det afspejler sig i matematikfaget på hf. Anvendelsesorientering medfører, at faget fremstår praksisrettet og konkret i forhold til omverdenen. For en del kursister giver anvendelsesorientering mulighed for en positiv tilgang til faget og en øget forståelse.

Anvendelsesorienteringen betyder ikke, at matematisk teori ikke indgår. Kursisterne på hf B-niveau vil ofte fortsætte med en matematikundervisning, der indgår som en del af en mellemlang videregående uddannelse, og arbejdet med de teoretiske sider af matematikken giver mulighed for at opnå en større indsigt i matematikfagets natur og omfattende anvendelser.

Der vil ofte være praktisk umuligt at etablere et egentligt samarbejde med andre fag. Kursisterne må derfor møde andre fags problemstillinger gennem arbejdet med større opgaver og projekter og i sådanne sammenhænge forholde sig til fagets muligheder og begrænsninger i arbejdet med den konkrete sag.

I læreplanens afsnit 1.1 og 1.2 er der givet en kompakt beskrivelse af fagets identitet og af det overordnede formål med undervisningen. Når dette skal udmøntes i undervisningsforløb, kan man bl.a. lade sig inspirere af den beskrivelse af faget, der gives gennem *KOM-rapporten* med *de otte matematikkompetencer*. I det afsluttende kapitel *Hvad er matematik?* er dette foldet ud og eksemplificeret.

2. Tilrettelæggelse

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Som lærer må man være opmærksom på kursisternes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning hver gang, man tager fat på et nyt emne. Desuden skal man have hf's anvendelsesrettede profil i tankerne. Dette gælder i særlig grad i starten af forløbet. Den måde, matematikken præsenteres på i lærebøger, er ikke nødvendigvis den samme som den måde, kursisterne lærer faget på. Kursisternes tilegnelse af fagligt stof vil i nogle sammenhænge starte med lærerens præsentation af bestemte metoder, men i andre sammenhænge starte med, at kursisterne prøver sig frem. Forståelse for fagets deduktive opbygning forudsætter en abstraktionsevne, som langsomt må opbygges og trænes af kursisterne, bl.a. gennem de eksperimentelle tilgange til faget. Kursisterne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, så de kan aktivere det i relevante situationer, og det sker bedst ved, at kursisterne aktivt og selvstændigt arbejder med faget. Derfor kræver matematiklæring bl.a., at kursisterne går i dialog med hinanden og med læreren for herigennem at udvikle deres begrebsbeherskelse.

2.1. Den indledende undervisning

Den indledende undervisning er af central betydning for hele det efterfølgende forløb, uanset om faget er valgt på C-, B-niveau. Langt de fleste kursister møder op med store forventninger: Nu skal der ske noget nyt! Og det skal der. Alle skal gøre en indsats for at få det hele til at fungere, så kursisterne hver dag glæder sig til at komme i skole.

Det anbefales at tilrettelægge undervisningen, så kursisterne fra første færd lærer noget nyt. Endvidere at man tidligt evaluerer, om de har lært noget. Sådanne løbende evalueringer tjener både til, at man som lærer reflekterer over sin undervisning – hvad virker, og hvad virker åbenbart ikke? – og til at kursisterne får hurtige og præcise tilbagemeldinger på, hvor deres svage punkter er osv.

Der er ingen generel evidens, der kan begrunde, at man begynder med repetition af stof fra C-niveau. Det kan heller ikke anbefales at starte forløbet med en eller anden screening, der kan vise kursisterne, at de ikke rigtig har lært noget på C-niveau. Tværtimod vil det være værdifuldt for kursisternes arbejde med faget på det højere niveau, de nu møder det, om man kan inddrage og bygge på forskellige elementer, de har med sig, dels fra folkeskolens matematikundervisning, dels fra C-niveau. Kursisterne på et givet hold har normalt ret forskellige forudsætninger; nogle mestrer algebraisk manipulation og ligningsløsning, andre har en del 'hvide pletter', og atter andre har måske tidligt i skoleforløbet fået den opfattelse, at de er dårlige til matematik. En så heterogen forsamling kan ikke homogeniseres ved et 'brush-up-kursus' i starten af forløbet. Den pædagogiske opgave er at give alle kursister en vis selvtillid og en tro på, at selv om ikke alle kan nå toppen, kan alle komme pænt over bundlinjen.

Tilrettelæggelse og gennemførelse af den indledende undervisning kræver en god planlægning af holdets matematiklærer. Det er ikke en god planlægning blot at følge lærebogen fra side 1 og fremefter. På 2-årige kurser indebærer planlægning af den indledende undervisning indebærer, at der tages kontakt til de øvrige lærere, klassen har, for at få de første gensidige overvejelser om fagligt samarbejde:

- med idræt om indsamling og behandling af data fra målinger på kursisterne selv og/eller deres præstationer
- med dansk og engelsk om skriftlighed
- med dansk om argumentation
- med andre B-niveau-hold, hvis det er muligt.

Når læreplanen skal udmøntes i undervisning, skal man huske hele tiden at have både kernestof og supplerende stof med i overvejelserne.

2.1.1 Overgangen fra C- til B-niveau på hf-enkeltfag

På hf-enkeltfag er det udbredt, at et B-niveau i matematik ikke følger umiddelbart efter et C-niveau. Derfor vil der blandt kursisterne i matematik B-niveau på hf-enkeltfag ofte være stor forskel på, hvor lang tid før, den enkelte kursist har gennemført et C-niveau. Desuden har kursisterne oftest gennemført meget forskellige C-niveauer (nogle gange tillige fra forskellige ungdomsuddannelser). Ligesom i alle andre forløb er det læreren, der har ansvar for, at de faglige mål nås på matematik B-niveau. Kursisters varierende forudsætninger kan kræve særlige hensyn til tilrettelæggelsen.

Lærerne på et hf-enkeltfagskursus – og tilsvarende på et 2-årigy hf kursus – bør koordinere indsatsen på C og B, så man er opmærksom på de kursister i matematik, der ønsker at fortsætte på B-niveau, og giver disse den bedst mulige start på B. Det faktum, at kursisterne ikke nødvendigvis skal til eksamen på C-niveau, kan give muligheder for forberedende forløb med opgaver og andet materiale, der er rettet mod B-niveau. Værkstedstimer kan evt. spille en rolle i dette.

Kursisterne har, når de begynder B-niveau på enkeltfag, ofte afsluttet C-niveau med eksamen. Dette betyder, at kursister på B-niveau i matematik på hf-enkeltfag ofte ikke på C-niveauet er blevet forberedt på B-niveauet. Overgangen kan derfor virke brat og markant.

Overgangen kan derfor kræve en ekstra indsats. Indsatsen bør være fremadrettet mod indholdet på B-niveau. Man bør være opmærksom på, at det vil ofte være muligt at inddrage dele af C-niveauets stof undervejs på B-niveau, jf. nedenfor.

Det kan være en mulighed at få tilført værkstedstimer til B-niveauet, hvor værkstedstimerne kan være en støtte, så flest mulige af kursisterne kommer godt i gang på B-niveau. Det kan være, at nogle af kursisterne har behov for en kort brush-up, eller man kan tilrettelægge en introduktion for hele holdet, hvor stof fra C-niveau indgår (såsom de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktioner, trekantsberegninger eller statistik). Hvor det er muligt på et enkeltfagskursus, kan man også målrette en indsats for udvalgte kursister.

2.1.2 Et eksempel på en plan for den indledende undervisning

Den indledende undervisning kunne eksempelvis tilrettelægges således (rækkefølgen kan evt. afgøres af samarbejdet med andre fag):

- *Funktioner og modeller*
  Fx at arbejde videre med den viden kursisterne har fra C-niveau og udbygge med regression – og heri måske træning af nyt CAS-værktøj. Uddybning af funktionsteori.
- *Trigonometri*
  Løfte trigonometrien fra C-niveau ved fx at arbejde med trekanter, hvor der kommer to løsningsmuligheder. Det kan også være et udgangspunkt at fokusere på teorien, definition af cosinus og sinus ud fra enhedscirklen og beviser for cosinus- og/eller sinusrelationer.
- *Statistik*
  Fx med udgangspunkt i en undersøgelse, hvor resultaterne kan anvendes til chi-i-anden test.

Hvis lærebogen ikke støtter lærerens ønsker fuldt ud, så findes der med stor sandsynlighed forløb blandt emu'ens mange materialer, der kan hentes og rettes til.

2.2. Planlægning af det samlede forløb

Det faglige arbejde i matematik skal i almindelighed bidrage til, at kursisterne opnår en dybere indsigt i matematikkens anvendelser og får kendskab til dele af matematisk teori.
I læreplanens afsnit 1.2 hedder det: "Gennem undervisningen skal kursisterne opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal kursisterne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige matematiske kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår. Endvidere skal de opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi."

Den overvejende del af undervisningen foregår i faget selv. Tilrettelæggelsen af dette drejer sig om: Hvorledes udmøntes kernestof og supplerende stof, så de faglige mål nås. Det supplerende stof skal ikke realiseres gennem en række ultrakorte indslag. Det skal ifølge læreplanen være "sammenhængende forløb", men det må gerne integreres i undervisningsforløb med kernestoffet.

2.3 Undervisning i færdigheder

Kravet til beherskelse af elementære færdigheder og mestring af algebraisk manipulation er meget forskellig på C og B. I den indledende undervisning kan man med fordel sætte fokus på bestemte færdigheder, når det er relevant i forbindelse med bestemte emner, fx:

- *regningsarternes hierarki* i forbindelse med opgaver vedrørende lineære udtryk
- *formelhåndtering* i forbindelse med geometriske emner som arealer og Pythagoras' læresætning
- *brøkregning* i forbindelse med ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger
- *brug af koordinatsystemer* i forbindelse med variabelsammenhænge
- *løsning af ligninger* i forbindelse med variabelsammenhænge og med geometriske opgaver
- *parentesregler* i forbindelse med rentesregning
- *procentregning* i forbindelse med rentesregning og eksponentiel vækst, og med statistik og indekstal
- *potensregler* i forbindelse med eksponentielle sammenhænge og senere potenssammenhænge
- *grafkending* i forbindelse med vækstmodeller og senere polynomier
- *kvadratsætninger* i forbindelse med cosinusrelationerne, og senere 2. gradspolynomier

De forskellige færdigheder og regler skal holdes ved lige. Det kan ske gennem små øvelser i de første minutter af nogle af lektionerne, gennem traditionelle skriftlige opgaver eller ved at lade kursisterne selv formulere opgaver og udfordre hinanden.

2.4. Undervisningsdifferentiering

Det er vigtigt at tilrettelægge undervisningen, så alle kursister får matematiske succesoplevelser i undervisningen. Det er med til at styrke kursisternes matematiske indlæring, men også kursisternes interesse for matematikfaget.
På mange matematikhold er kursisternes matematiske evner imidlertid ofte temmelig spredte. Ved planlægningen af undervisningen bør det derfor medtænkes, at både den fagligt svage og den fagligt stærke kursist får fagligt udbytte af undervisningen. Hele klassen behøver således ikke arbejde med nøjagtig det samme stof.
Der findes mange måder at foretage undervisningsdifferentiering på. Nogle eksempler kan være:

- Opgaver på forskellige niveauer evt. med nogle tvungne opgaver og en række valgfrie opgaver.
- En given opgave kan typisk foldes mere eller mindre ud afhængig af niveau. Ved konstruktion af sådanne opgaver kan det være anvendeligt at tænke i de forskellige niveauer i SOLO-taksonomien.
- Gennemgang af lektie kun for kursister med problemer med lektien. De øvrige kursister kan arbejde med andre ting.
- Ved bevisførelse kan kursisterne individuelt vælge, om de vil deltage i tavlegennemgang eller selv arbejde med beviserne (evt. ud fra en "opskrift"). Kursister, som selv arbejder med beviser, gennemgår senere beviset på tavlen for læreren.
- De stærkere kursister kan fx konstruere hjemmeopgaver, som hele klassen skal regne.
- De stærkere kursister kan holde korte oplæg om perspektivering af emnet. Fx et oplæg om centralperspektivet, et oplæg om Malthus' overvejelser om lineær og eksponentiel vækst, eller et oplæg om Gallup og troværdigheden af opinionsmålinger..
- De stærkere kursister kan arbejde med flere og/eller sværere beviser.
- Ved temaopgaver (se afsnit 2.7) er det oplagt at have opgaveformuleringer på forskellige niveauer.

Differentiering bør ikke udelukkende foregå efter niveau. Der *kan også differentieres efter interesse*. Der er stor forskel på, hvilken form for indlæring kursisterne foretrækker. Nogle kursister vil helst regne opgaver, andre foretrækker at arbejde med beviser, og andre igen vil helst eksperimentere sig frem til ny viden. Det er vigtigt, at alle disse kursisttyper stimuleres i undervisningen. Man kan eksperimentere med, at kursisterne selv i nogle forløb vælger den metode, de foretrækker. Læreren har naturligvis det overordnede ansvar og bør sørge for, at der veksles mellem de forskellige tilrettelæggelser for gennemgang af stof, så det ikke hele tiden er den samme kursisttype, der fanges.

På www.uvmat.dk ligger et større inspirationsmateriale med ideer til undervisningsdifferentiering inden for mange forskellige emner.

2.5 Eksperimenterende tilgang

Både matematikkens analytiske side og syntetiske skal være til stede i undervisningen. Den analytiske side rummer den spørgende, den undersøgende, den induktive tilgang, sammenfattet i udtrykket *den eksperimenterende tilgang*. Den syntetiske side rummer gennemgang af definition, sætning, bevis og fremlæggelse af afprøvede matematiske metoder, sammenfattet i udtrykket *de deduktive sider ved matematik.*

Ny viden, som kursisterne skal opnå, skal ikke altid være kogt ned i en afsluttet form som fx en sætning og et tilhørende bevis. Den eksperimenterende tilgang er en arbejdsform, der kan give kursisterne indsigt i modellering og ræsonnement som del af en proces, hvor de opnår ny viden. Den eksperimenterende arbejdsform minder om en induktiv arbejdsform, hvor kursister skal prøve at komme fra eksempler til det generelle. I andre sammenhænge minder den eksperimenterende arbejdsform om en tilgang, hvor kursisterne ser strukturer ud fra simuleringer.

På emu'en findes en række eksempler på forløb med eksperimenterende tilgang. En del af dette er samlet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*), der ligger på emu'en i elektronisk form. Andet er samlet i bogen *MATHIT*, der ligeledes ligger på emu'en i elektronisk form, og hvor fokus er de nye muligheder for at anvende en eksperimenterende tilgang, som har åbnet sig med tilgængeligheden af de matematiske værktøjsprogrammer.

2.5.1 Eksempler på eksperimenterende forløb

Hvis arbejdsformen skal blive en naturlig del af matematikundervisningen, skal kursisterne præsenteres for den fra starten. Men det faglige indhold og de faglige udfordringer må naturligvis tilpasses holdet, niveauet og den matematiske modenhed. Eksempler på en eksperimenterende tilgang kunne være:

– *Klassisk geometri - egenskaber for højder, medianer og midtnormaler i en trekant:* I geometri som supplerende stof kan kursisterne selv argumentere for formler for vinkelsummer i en n-kant på basis af sætningen om vinkelsummen i en trekant, selv finde formler for arealer af parallelogrammer, trapezer mv., eller de kan selv i et dynamisk geometriprogram eksperimentere og formulere sætninger om trekanters karakteristiske linjer og de om- og indskrevne cirkler. Afhængigt af niveau kan eksperimenterne efterfølges af beviser for egenskaberne. Kursisterne samler deres arbejde i en temarapport (se 2.7) om klassisk geometri. Til den mundtlige prøve kan eksperimenterne og konstruktionerne gennemføres interaktivt og kursisterne kan på denne måde vise deres evne til matematisk ræsonnement. Se mere om en mulig tilrettelæggelse af forløbet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*, nævnt i afsnit 2.5).

– *De elementære funktioners karakteristiske egenskaber:* Ved hjælp af et CAS-program skal kursisterne selv variere relevante parametre, lægge tangenter og flytte disse langs kurver, skære linjer og kurver og formulere nogle sammenhænge, som de siden skal gennemføre matematiske argumenter for. I forløbet kan indlægges en række udfordringer til de stærkere kursister.

– *Spaghettimatematik:* Kursisterne skal i grupper, fx parvis prøve at knække fx 10 stykker spaghettier i tre stykker så tilfældigt som muligt. Ud fra disse eksperimenter skal de prøve at danne trekanter med de tre stykker og derefter komme med et bud på betingelserne for, at de tre stykker kan danne en trekant, og videre på sandsynligheden for, at vi får en trekant. Forløbet kan udmærket udgøre et forløb med supplerende stof – uligheder grafisk og analytisk - efter et forløb om lineære sammenhænge. Forløbet kan også afsluttes med eller indgå i temarapport, det har en god teoretisk tyngde og vil egne sig fint til den mundtlige prøve. Se mere om en mulig tilrettelæggelse af forløbet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*, nævnt i afsnit 2.5).

– *Simulering i statistik af et stikprøvemateriale:* På emu'en ligger et materiale, der præsenterer kravene til kernestoffet inden for emnet statistisk hypotesetest. I dette materiale indgår en præsentation af, hvorledes man kan løse sådanne problemer med en eksperimenterende tilgang.

2.6 It – matematiske værktøjsprogrammer

I læreplanens afsnit 3.3 hedder det: "Undervisningen tilrettelægges, så lommeregnere, it og matematikprogrammer indgår som væsentlige hjælpemidler i kursisternes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning og til symbolsk differentiation og integration. Endvidere udnyttes lommeregnere, it og matematikprogrammer i den eksperimentelle tilgang til emner og problemløsning."

Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af værktøjsprogrammer, og det vil samtidig styrke mulighederne for fagligt samarbejde. Læreplanens betoning af den eksperimentelle tilgang peger på, at der bør være adgang til værktøjer, der kan håndtere eksperimentel (dynamisk) geometri og eksperimentel (dynamisk) statistik. Besvarelser af skriftlige opgaver med anvendelse af sådanne værktøjer er accepteret helt på linje med andre typer besvarelser.

Det tager tid at lære at bruge et bestemt program. Derfor bør man på et hold inddrage de værktøjsprogrammer, man har valgt at arbejde med, så tidligt som muligt, og inddrage dem hyppigt og ikke bare af og til. Det tager også tid for lærerne selv at lære at bruge dem – og programmerne ændres jævnligt, så næste gang man har et hold på dette niveau, er der måske kommet en opdateret version, der adskiller sig betydeligt fra den tidligere – eller skolen har besluttet at gå over til et nyt program. Nogle steder har man også den situation, at eleverne sidder med forskellige programmer. Med sådanne vilkår er det en blindgyde, hvis man først vil tage programmerne i brug, når man via kurser eller selvstudium er blevet 'superbruger'. Overvej i stedet, hvordan hele klassen kan inddrages som ressource, hvordan man kan give ansvar til bestemte elever og overlade til dem at hjælpe kammerater med tekniske problemer, hvordan en fælles bestræbelse på at beherske et værktøjsprogram kan udvikle og styrke samarbejdsklimaet på holdet.

I bogen *MATHIT* med tilhørende hjemmeside kan man finde en række eksempler på, hvordan it begrundet i fagdidaktiske overvejelser med fordel kan integreres i matematikundervisningen på alle niveauer.

Som en hjælp til lærerens planlægning af forløb inden for faglige emnekredse som vækstmodeller, geometri og statistisk hypotesetest, og hvor der skal arbejdes intensivt med værkstøjsprogrammer, kan man på emu'en og andre steder finde inspiration og manualer til en række standardprogrammer.

2.7 Temaopgaver

Ifølge læreplanen skal "En betydelig del af undervisningen inden for kernestoffet og det supplerende stof tilrettelægges som projektforløb eller større temaopgaver."

Det er vigtigt, at man fra første færd i planlægningen inddrager overvejelser om, hvilke temaopgaver, holdet skal lave. For kravet til den mundtlige prøve er, at "en betydelig del af eksamensspørgsmålene skal være udformet, således at det er muligt at inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver med tilhørende kursistrapporter."

Temaopgaver repræsenterer en måde at organisere stoffet på. Nogle lærere vil foretrække at gennemføre nogle traditionelle kursusforløb ind imellem eller som optakt til større temaopgaver. Andre vil foretrække at dække hele det faglige stof med temaopgaver, således at disse tilsammen udgør prøvegrundlaget.

Projektforløb og temaopgaver kan være designet på to forskellige måder:

1. En temaopgave kan være *knyttet til et bestemt undervisningsforløb* om et afgrænset fagligt emne som fx: trigonometri, deskriptiv statistik, lineære og eksponentielle vækstmodeller, monotoniundersøgelser, logistisk vækst, integralregning.
2. En temaopgave kan også være tænkt *på langs af det samlede forløb* og være bygget op ud fra et fagligt emne, der er i spil adskillige gange gennem hele undervisningen fra simple sammenhænge til mere komplekse, fra anvendelser og opgaver til en mere teoretisk gennemgang, fra rent matematiske til et fagligt samarbejde. Temaopgaven kan samle de forskellige behandlinger af emnet op til en helhed: vækstmodeller, afstande og vinkler, optimering, statistiske metoder, arealberegning. Eller være bygget op ud fra en matematisk kompetence: matematisk modellering, matematisk ræsonnement. Eller kombinere de to måder at samle stoffet på til helheder.

Den første type afgrænsede temaopgave kan have den fordel, at man så at sige gør emnerne færdige efterhånden. En sådan lineær tilgang giver et overblik, mens man er på vej gennem stoffet. En af svaghederne kan være, at man ikke så let får et samlet overblik over stoffet. Og ved den mundtlige prøve kan der være stor forskel i sværhedsgraden på de enkelte spørgsmål.

Den anden type temaopgaver på langs kan have den fordel, at der skabes sammenhæng i hele forløbet for kursisterne, og at det giver muligheder for at organisere den mundtlige prøve, så stof fra den indledende undervisning integreres med det mere komplekse stof fra den senere undervisning. Sværhedsgraden af de enkelte spørgsmål vil være mere ækvivalente, og samtidig vil hver temaopgave give både den svagere og den stærkere kursist muligheder for at præstere på sit eget niveau. En af vanskelighederne er, at det for læreren kræver at større planlægningsarbejde fra starten, og at man i planlægningen har et overblik over hele pensum fra 0 til B.

Temaopgaven formuleres af læreren og bør altid rumme både matematisk ræsonnement, anvendelser gennem opgaveregning og behandling af mere komplekse problemer. Temaopgaver kan være en god ramme om integration af kernestof og supplerende stof.

Temaopgaver besvares af kursisterne i form af en *temarapport*. Denne kan udmærket være lavet i et gruppearbejde. Kursisternes temarapporter skal ikke nødvendigvis læses og rettes til bunds af læreren. Nogle dele som anvendelser af teori på skriftlige opgaver kan være rettet som traditionelle skriftlige opgaver. Andre dele er kommet til veje gennem et gruppearbejde under lærerens vejledning og tjener i sidste ende som kursistens forberedelsesmateriale til den mundtlige prøve.

På emu'en ligger en række eksempler på temaopgaver.

2.8 Skriftlighed

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: "I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. En række af projektforløbene og temaopgaverne afrundes med, at kursisterne udarbejder en rapport."

Man lærer ikke matematik uden at skrive. At formulere sig skriftligt under de krav til præcision og formidling, der gælder, bidrager til at skærpe den matematiske tankegang. Det skriftlige arbejde skal på den ene side tilrettelægges, så det peger frem mod de afsluttende skriftlige opgaver: den skriftlige eksamen i faget selv, evt. skrivning af større skriftlig opgave. På den anden side skal arbejdet med temarapporter, hvor kursisterne selv organiserer stoffet til den mundtlige prøve, udformes, så det støtter begrebsindlæringen og evnen til at formidle et kompliceret stof. Kursisterne vil først blive rigtig gode til at skrive matematiske tekster, når de kan sige noget om, hvad matematik er for en slags disciplin.

På www.uvmat.dk ligger et omfattende inspirationsmateriale til arbejdet med den skriftlige matematik, både med eksempler på besvarelser af eksamensopgaver og kommentarer til større matematikprojekter, til større skriftlige opgaver.

I løbet af få år vil eksamensopgaverne blive stillet digitalt, og alle kursister skal arbejde med de matematiske værktøjsprogrammer på computer. Når skriftlige opgaver og rapporter afleveres digitalt, må det give anledning til at overveje strategier i rettearbejdet. I stedet for at rette i bund så kan man med fordel lægge rettelser og kommentarer ind, så kursisterne efterfølgende selv skal rette op og forbedre deres besvarelse eller rapport. Når lærerne får indarbejdet at give en elektronisk tilbagelevering af skriftlige produkter før lektionen, så kan en del af kursisternes lektier være, at de har sat sig ind i kommentarerne, hvorved man kan nøjes med ganske få fokuspunkter i selve timen, ja måske ikke altid behøver at gøre det til et selvstændigt punkt.

2.9 Mundtlighed

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: ”Den enkelte kursist skal i undervisningen aktivt bruge det matematiske sprog til at formidle sin viden.” Og videre i læreplanens afsnit 3.2: ”En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på, at kursisterne udvikler deres matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.”

Kursisterne skal tale matematik. I klassens diskussioner om nye matematiske begreber og metoder, og i pararbejde og gruppearbejde, hvor de både skal diskutere opgaveløsning og matematiske beviser og ræsonnementer. Kursisterne møder nye ord og begreber næsten i hver eneste time, og det tager tid at forstå dem og lære at bruge dem. Det er i denne sammenhæng som med sprog generelt: Kursisterne lærer det først og fremmest ved at bruge ordene og begreberne, og hver kursist skal udfordres på sit niveau. Lad kursisterne fx læse en lille matematisk tekst højt fra en lærebog eller fra en tekstopgave. Lad dem fx beskrive et grafisk forløb med brug af de begreber, de kender, for andre kursister, der på det grundlag skal skitsere grafen – og brug det som grundlag for en diskussion af præcision i sprogbrug.

Meget af dette foregår bedst i et gruppearbejde, hvor kursisterne først skal diskutere en strategi for løsning af et stillet problem, før de kaster sig ud i det. Lad dem diskutere en fremgangsmåde til at beregne afstande og højder ude i et terræn, og lad grupperne beskrive deres strategi for hinanden for at afprøve, om de kan kommunikere om det, før de går ud og løser problemet; ved at tale om det til andre opdager man lettere evt. svage punkter. Den samme arbejdsform kan praktiseres i arbejdet med statistik eller andre faglige emner.

2.10 Værkstedsundervisning

Matematik indgår i værkstedsundervisningen, og læreren optræder typisk i vejlederrollen og giver vejledning til én kursist eller få kursister. Værkstedstimerne skal støtte kursisterne i udviklingen af gode studie- og arbejdsvaner, bidrage til at udvikle kursisternes metakognitive tænkning og sikre tid til en selvstændig studiemæssig fordybelse (jf. læreplanen for værkstedsundervisning). Værkstedsundervisningen omfatter både studieværksted og lektieværksted.

Skriftligt arbejde, herunder skriftlig formidling, er et velegnet tema i værkstedsundervisningen. I forbindelse med holdets første matematikrapport kan en værkstedstime benyttes til at bevidstgøre kursisterne om, hvordan man hensigtsmæssigt arbejder med en sådan opgave, og at give dem en god start på rapportarbejdet. Også ved introduktion af projektarbejde i matematik er det nærliggende at benytte værkstedsundervisning.

Ligeledes er mundtlig fremstilling et muligt tema for en eller flere værkstedstimer. Man kan fx benytte en time til at træne kursisterne i at formulere sig sammenhængende om et matematisk emne, problem eller ræsonnement, og diskutere med dem, hvad man skal lægge vægt på i en sådan situation. Det faglige indhold kan være ren matematikteori eller en matematikanvendelse, eller det kan dreje sig om formidling af hovedpunkter fra en matematikrapport til de øvrige kursister på holdet.

Lektieværkstedet udgør en del af værkstedsundervisningen. Her vil lektiehjælp i matematik, differentieret efter den enkelte kursists forudsætninger og evner, imødekomme et stort behov hos kursisterne.

Også eksamensforberedelse indgår normalt i værkstedsundervisningen. I matematik kan man bruge en værkstedstime på at gøre kursisterne bekendt med den mundtlige eksamensform og hjælpe dem til at håndtere situationen hensigtsmæssigt.

2.11 Lektier

Det er vigtigt at få lagt gode arbejdsrutiner fast fra starten. Klassens lærere bør sikre, at lektien i såvel matematik som i andre fag er overkommelig for alle kursister. Da kursisterne er så forskellige, bør der tænkes progression og undervisningsdifferentiering ind i lektierne fra første færd: Nogle kan nå langt og bør få udfordringer, men alle skal kunne nå det grundlæggende, der bringer dem over bundlinjen. Kursisterne behøver heller ikke nødvendigvis have samme lektie for, fx kan kursister regne forskellige opgaver, eller have forskellige stykker teori for, som de så skal gennemgå for hinanden i timen. Det ville også bidrage til at styrke mundtligheden.

Det er vigtigt, at kursisterne er klar over formålet med lektielæsning: Skal de træne færdigheder via nogle opgaver? Skal de indøve metoder, som de helst skal kunne huske udenad? Hvilke matematiske begreber i teksten, som de skal læse, skal de kunne redegøre for med eget sprog? Når der gives lektier for i en lærebog, er det en god ide *at stille nogle præcise spørgsmål til teksten*, som kursisterne skal svare på og samtidig give dem nogle anvisninger på at læse teksten. Det kan fx af og til være en god ide at få kursisterne til at læse teksten højt – så læser man ikke henover de svære ord og begreber. Og hvad er det præcis, der forventes af dem i timen? Skal de blot forberede sig til en gennemgang af nyt stof, eller skal de fx i grupper gennemgå eksempler eller små beviser for hinanden?

Både opgaveark til det daglige arbejde i klassen, oplæg til temaopgaver og de skriftlige afleveringsopgaver bør stilles, så der er en indbygget progression. Ikke alle kan nå alt inden for den givne elevtid eller det afsatte antal lektioner, men alle bør kunne nå det mest nødvendige inden for det pågældende faglige emne.

3. De enkelte faglige emner

De faglige mål, som kursisterne skal opnå i undervisningen i matematik, er formuleret i læreplanens afsnit 2.1. De særlige faglige mål, som kursisterne skal opnå med henblik på de skriftlige prøver, er yderligere udmøntet gennem de stillede opgavesæt. Det følgende er således alene nogle supplerende kommentarer.

3.1 Ligninger

I alle fag, der anvender matematik, indgår løsning af ligninger eller ligningssystemer. Eksempler fra andre fag bør jævnligt inddrages for at illustrere, hvordan samme matematiske problem kan have mange forskellige fremtrædelsesformer og for at vise forskelle og ligheder i terminologi og variabelbetegnelser.

Gennem arbejdet med et righoldigt eksempelmateriale skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger, og have opbygget en indsigt i, at løsning sker gennem gentagne anvendelser af 'omvendte operationer'.

Det forventes i øvrigt, at kursisterne kan håndtere spørgsmål som:

- for hvilke tal c har ligningen $f(x) = c$ netop én løsning?
- angiv for enhver værdi af konstanten a antallet af løsninger til ligningen ..., hvor konstanten kan indgå forskellige steder i et funktionsudtryk, fx ligningen $x^2+ax+2 = 0$

Det forventes ikke, at kursisterne kan bestemme værdimængder.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil kursisterne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: For hvilke værdier af x er medicinkoncentrationen større end/mindre end en given værdi?

3.2 Statistik og sandsynlighedsregning

Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes på rent matematikfagligt grundlag. På grund af den udprægede anvendelsesorientering i statistikken er det en stor fordel at inddrage talmaterialer fra fag som samfundsfag, idræt eller biologi, når metoder og begreber skal indlæres.

Selv om statistik ikke indgår i den skriftlige prøve på B-niveau, rummer de faglige mål og kernestoffet alligevel en række præcise faglige krav til, hvad kursisterne skal kunne. Kursisterne forventes at kunne anvende simple statistiske deskriptorer og simple grafiske præsentationer i en beskrivelse af et datamateriale. Hvis de selv skal tegne histogrammer, vil talmaterialet være opdelt i intervaller med samme intervalbredde.

I læreplanens omtale af det supplerende stof siges det, at der skal gennemføres *sammenhængende forløb med statistisk analyse af en opstillet hypotese*, diskussion af en stikprøves repræsentativitet samt anvendelse af to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller. Det betyder, at kursisternes forventes at kende og kunne anvende begreberne:

- population og stikprøve
- repræsentativitet og systematiske fejl (bias) samt skjulte variable (konfundering) i en diskussion af konklusioner draget ud fra resultater af en statistisk test.

På emu'en ligger en række materialer, der frit kan anvendes i planlægningen af forløb om statistik, herunder et gennemarbejdet materiale om chi-i-anden fordelingen.

3.3 Funktioner, grafer og variabelsammenhænge

Funktionsbegrebet og de elementære funktioner, der er omtalt i læreplanens afsnit om kernestof, kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper. Eksempelvis kan

- det abstrakte funktionsbegreb og polynomier blive præsenteret under arbejdet med at opstille de relevante sammenhænge i optimeringsopgaver
- eksponentielt voksende og aftagende funktioner blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald

Kursisterne forventes at kunne beskrive *de elementære funktioners karakteristiske egenskaber* med begreber som definitionsmængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema og asymptotiske forløb. Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, forventes kursisterne at kunne argumentere for disses betydning for det grafiske forløb. Til de karakteristiske egenskaber hører yderligere:

- sammenhængen mellem grad og antal nulpunkter for polynomier
- sammenhængen mellem diskriminant, toppunktets beliggenhed og antal nulpunkter for 2. gradspolynomier
- begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant, og sammenhængen mellem a^x og e^{kx} for eksponentielle udtryk
- regneregler for logaritmefunktioner
- sammenhængen mellem procentvækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner

3.4 Differentialregning og integralregning

Matematisk modellering med brug af differentialregning bør inddrage eksempelmaterialer fra andre fag, hvor det er muligt. Håndtering af disse problemstillinger forudsætter, at kursisterne er fortrolige med de emner, som er omtalt i kernestoffet.

I en række opgaver vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de typer af regneforskrifter, der er behandlet i undervisningens gennemgang af de elementære funktioner og regnereglerne for differentiation. I sådanne tilfælde forventes det ifølge læreplanen, at *kursisterne kan anvende it-værktøjer til at differentiere eller integrere givne udtryk*.
Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende indebærer studiet af sammenhængen mellem f' og begreber som monotoniforhold og lokale ekstrema inddragelse af kontinuitetsbegrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling.

I en række sammenhænge vil det være naturligt at tænke kernestof og supplerende stof sammen, eksempelvis at lave modelleringsforløb, der kan pege frem mod opstilling af differentialligninger, eller at inddrage den dobbelt afledede i studiet af grafer.

3.5 Geometri og trigonometri

Det forventes, at kursisterne kender begreber og terminologi vedrørende trekanters højder, medianer og vinkelhalveringslinjer, men det er ikke en del af kernestoffet at kende til indskrevne og omskrevne cirkler eller til egenskaber ved skæringspunktet mellem omtalte linjer.

Det forventes, at eleverne på B-niveau kan håndtere og løse foreliggende geometriske problemer med anvendelse af trigonometri, herunder at de kender sinus- og cosinusrelationerne.

For at udvikle kursisternes læringsstrategier på flere felter inden for geometrien kan man med fordel lade kursisterne illustrere og bearbejde geometriske objekter i dynamiske geometriprogrammer. Det kan også anvendes til at skabe undervisningsdifferentiering. Ved skriftlige prøver må de løse opgaver ved hjælp af dynamiske geometriprogrammer.

3.6 Matematisk ræsonnement

Kursisterne skal møde den matematiske teori og selv arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement i undervisningen. Kun derved kan kursisterne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem, *hvad man ved*, *hvad man antager,* og *hvad man ønsker at vide*. Det gælder, uanset om emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. I skriftlige rapporter og mundtlig fremstilling skal de kunne fremlægge denne indsigt på en sådan måde, at det matematiske argument og den matematiske tankegang fremstår klart.

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori, og tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig. Via en drøftelse af de anvendte forudsætninger giver det samtidig indblik i matematikkens opbygning.

4. Evaluering

Evaluering er en del af hf-undervisningen. I hf-bekendtgørelsen står:
”Der gives ikke afsluttende standpunktskarakterer (årskarakterer), men lærerne giver mindst to gange årligt kursisterne en vurdering af deres standpunkt i hvert fag ... . Vurderingen skal danne grundlag for en vejledning af den enkelte kursist om, hvordan kursisten udvikler sin faglige progression, sine arbejdsmetoder m.v.”
Tilsvarende står i hf-enkeltfagsbekendtgørelsen:

”Der gives ikke afsluttende standpunktskarakterer (årskarakterer), men lærerne giver mindst to gange årligt kursisterne en vurdering af deres standpunkt i faget ... . I fag, der afsluttes efter et semester, giver lærerne mindst to gange i løbet af fagets uddannelsestid kursisterne en vurdering af deres standpunkt, jf. stk. 2. Vurderingen skal danne grundlag for en vejledning af den enkelte kursist om, hvordan kursisten udvikler sin faglige progression, sine arbejdsmetoder m.v.”

Evalueringer kan have mange former. Egentlige prøver i matematik bør altid tilrettelægges med et pædagogisk sigte – de dygtige kursister skal udfordres, men man skal samtidig have alle med. Prøver i bestemte faglige emner bør først afholdes, når de kursister, der gør en indsats, har lært så meget, at de har mulighed for at levere en præstation, der giver dem en tilpas selvtillid.

4.1. Løbende evaluering

I afsnit 4.1 af læreplanen hedder det: ”Både undervisningen og kursisternes faglige udbytte heraf evalueres løbende, bl.a. gennem fremadrettede evalueringssamtaler.” Sigtet med den løbende evaluering er altså dobbelt. Dels skal den vejlede den enkelte kursist i det videre arbejde med faget, dels skal den afdække om undervisningens tilrettelæggelse er optimal med hensyn til kursisternes udbytte.

Målet med den løbende evaluering er:

- At kursisterne fra begyndelsen af forløbet bliver opmærksomme på, hvor deres stærke og svage sider er i forhold til matematik
- At læreren vurderer, hvor gode kursisterne er til at lære matematik
- At kursisterne løbende får respons, så de ikke er i tvivl om deres faglige niveau
- At evaluere undervisningsforløb – undervejs eller når de afsluttes.

I læreplanens afsnit 4.1 hedder det: ”For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes kursisternes udbytte af forløbet evalueres.”

Metoderne i den løbende evaluering er mange og kan fx være:

- Respons på skriftlige opgaver. I læreplanen hedder det: ”Kursisterne afleverer jævnligt skriftlige opgaver og rapporter. Besvarelserne rettes og kommenteres af læreren.” Kommentarerne skal hjælpe kursisten videre. Derfor er det vigtigt, at der skrives kommentarer, med vejledning som hjælper kursisten videre. Hvis kursisterne elektronisk afleverer deres afleveringsopgaver, kan man som lærer udnytte, at man får overblik over den respons, man giver til opgaverne. Man kan selv samle de anbefalinger og vejledninger, man skriver fra gang til gang, eller man kan udnytte evt. faciliteter i skolens it-platform. Herved kan indsatsen målrettes, og man kan som lærer tydeligere følge kursistens udvikling. Kursistens udbytte er, at vedkommende tydeligere fokuserer indsatsen på, hvad vedkommende ikke er så god til.
- Respons på skriftlige rapporter. Det vil ofte hjælpe kursisten at give en første respons til et udkast til rapporten. Dette kan kursisten anvende til at færdiggøre rapporten. Det kan også være en fordel, hvis rapporten skal anvendes til den mundtlige eksamen (kursisten får mulighed for at fjerne eventuelle fejl). Rapporter lagt på klassens elektroniske platform vil kunne anmeldes af andre kursister som en del af evalueringen. Sådanne anmeldelser vil kunne indgå som materiale i et fagligt samarbejde med dansk.

- Mundtlig fremlæggelse, både af mindre og større opgaver. I forbindelse med projekt- eller emneforløb vil det være muligt at lade kursister fremlægge matematisk stof mundtligt for hinanden. Sådanne fremlæggelser kan evalueres både af læreren og af resten af holdet.
- Traditionelle test og skriftlige prøver, der tester, om kursisterne har forstået stoffet. I læreplanen hedder det: "*Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål.*" Man kan som lærer fx anvende en sådan test som udgangspunkt for en evaluering på klasseplan. Men en anden lige vigtig side ved test er, at give kursisterne mulighed for selvevaluering. Ved hjælp af fx elektroniske platforme kan man henvise kursisterne til sådanne selvrettende test. Sådanne test kan for nogle kursister virke motiverende. Desuden vil sådanne test kunne danne udgangspunkt for en evaluering.
- Evalueringssamtaler, se nedenfor.

Kursisterne kan inden eksamen få mulighed for enkeltvis, i grupper eller i klassen at formulere, hvad deres mål med eksamen er. Ved at formulere et sådant mål gøres kursisten klar over, hvad vedkommende skal arbejde mod, og det giver læreren (og evt. tutoren) mulighed for at konfrontere kursisten med evt. diskrepans mellem mål og indsats.

Studiebogen inddrages i den løbende evaluering.

Samtaler vil kunne indgå som en del af evalueringen. Evalueringen kan herved anvendes fremadrettet, så kursisten bliver hjulpet til eksplicit at formulere sit fokus for at få det bedste udbytte af undervisningen i matematik. Sådanne samtaler kan fx finde sted, mens resten af holdet arbejder med programlagt stof (fx løser opgaver). Hvis to eller flere hold er skemalagt parallelt, kan det være en idé at lade holdene arbejde samlet, mens der finder samtaler sted.

En evalueringssamtale kan have en varighed på højst 10-15 minutter. I en evalueringssamtale er det målet, at det fortrinsvis er kursisten, der taler. Derfor vil det være en god idé, hvis kursisten før samtalen får udleveret en række spørgsmål, som vil indgå i samtalen. Et væsentligt element i samtaler bør være selvevaluering. Kursisterne er ofte gode til at vurdere deres eget faglige niveau, og udbyttet af evalueringssamtalen kan øges, ved at kursisten selv formulerer, hvad vedkommende skal fokusere på i det fortsatte arbejde.

Eksempler på spørgsmål til evalueringssamtaler kunne være:
- Hvordan oplever du selv det går?
- Hvordan bedømmer du dit eget niveau?
- Hvordan bedømmer du dit aktivitetsniveau?
- Hvad er dit mål med forløbet i matematik?
- Hvad mener du, at du bør fokusere på i det fortsatte arbejde i matematik?

På 2-årigt hf bør tutor inddrages i evalueringssamtaler – enten kan det være tutoren, der afholder samtaler, eller også kan evalueringssamtaler tilrettelægges i samarbejde mellem tutor og matematiklærer.

4.2 Den mundtlige prøve

Ifølge læreplanens afsnit 4.2 skal "de endelige spørgsmål til den mundtlige prøve *offentliggøres i god tid* inden prøven og skal tilsammen *dække de faglige mål og det faglige indhold*." Spørgsmålene skal drøftes med kursisterne, så de forstår, hvad spørgsmålene præcist går ud på. Det kan ske løbende eller i forbindelse med repetitionen. I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”Efter hvert forløb eller i forbindelse med en repetition demonstreres, hvorledes det faglige stof kan udmøntes i eksamensspørgsmål.”

Man kan med fordel bygge hele eller hovedparten af den mundtlige prøve op på grundlag af temaopgaver. Med temaopgavernes kombination af simpel problembehandling, matematisk ræsonnement og modellering og behandling af mere komplekse problemer giver det eksaminanderne mulighed for at demonstrere en bred indsigt i pågældende emne. Det giver samtidig rum for både den stærke og den svagere kursist, så de får bedre mulighed for at demonstrere, hvad de kan. Hvis man vælger at bygge prøvegrundlaget op af temaopgaver på langs, giver det gode muligheder for at lave eksamensspørgsmål, der hver for sig rummer alle sværhedsgrader, og som ækvivalerer hinanden optimalt.

Man kan godt fravælge knapt så vellykkede undervisningsforløb, men man kan ikke fravælge faglige emner til den mundtlige prøve. Prøven omfatter hele læreplanen fra 0 til B-niveauet – der findes ingen differenslæreplan for opgradering fra C- til B-niveau.

Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Der må gerne være dubletter. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.

Det enkelte eksamensspørgsmål skal være så *præcist formuleret*, at der ikke kan være tvivl om, hvilket stofområde der vil blive eksamineret i. Udtryk som ”du kan evt. komme ind på...” eller ”hvis der bliver tid ...” skal undgås.

Eksamensspørgsmålene må hverken indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen.

Eksamensspørgsmålet er todelt med *en forholdsvis kort overskrift – fx temaopgavens overskrift – og en uddybende undertekst* med et eller flere konkrete delspørgsmål. De(t) konkrete spørgsmål er det stof, eksaminanden selv skal komme med et oplæg om. Samtaledelen bevæger sig inden for de rammer, som overskriften udstikker. På emu'en er der en række eksempler på udformning af eksamensspørgsmål.

Der er ingen fast regel for, hvor længe hver af de to faser i eksaminationen skal være, men normalt bør der afsættes godt halvdelen af eksamenstiden til første del. Eksaminanden skal have mulighed for en selvstændig fremlæggelse og ikke for hurtigt afbrydes.

Samtalen kan tage udgangspunkt i nogle elementer fra første del – eller hvis overskriften er en temarapport, inddrage elementer herfra, som eksaminanden ikke har berørt, og give vedkommende mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelser af noget teori, at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over det faglige område. I samtaledelen kan man ikke afkræve eksaminanden bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem. Fejl og faglige misforståelser kan give anledning til opklarende spørgsmål, men dette må ikke udvikle sig til undervisning.

Eksaminanderne må have *alle hjælpemidler*, lærebøger, notater, rapporter, skriftlige afleveringer, computer, dispositioner til spørgsmålene mv. med både til forberedelsen og i selve eksamenslokalet, men de må naturligvis ikke kommunikere med omverdenen. Eksaminanderne skal ikke bruge forberedelsestiden på at skrive en eventuel disposition, de har lavet hjemmefra, over på et andet stykke papir, men på at forberede sig på det spørgsmål, de har trukket.

Under selve eksaminationen må eksaminanden støtte sig til notater eller henvise til en rapport, men skal før prøvens afholdelse være gjort opmærksom på, at oplæsning eller afskrift af sådanne notater ikke tæller positivt med i bedømmelsen. Det samme gælder oplæsning fra en PowerPoint.

4.2.1 Eksamen i det faglige stof fra C-niveau

At kursisterne på hf-enkeltfag i matematik på B-niveau ofte har meget forskellige forløb i C-niveau bag sig, giver en særlig udfordring for forberedelsen til eksamen på B-niveau.

Det vil typisk *ikke* være muligt at lade alle kursister gå til eksamen på B-niveau i rapporter fra C-niveau, fordi kursisterne fx ikke har udarbejdet tilstrækkeligt med rapporter eller ikke længere er i besiddelse af rapporterne.

Det vil være muligt at udforme eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen således, at kursister, der er i besiddelse af rapporter fra C-niveau, vil kunne eksamineres i disse, mens kursister, der ikke er i besiddelse af rapporter fra C-niveau, kan eksamineres i åbne spørgsmål til stoffet.

På enkeltfags-hf kan det være en fordel, at det er hele det faglige stof fra både C- og B-niveau, der evalueres til den skriftlige og mundtlige eksamen (se dog nedenfor). Man kan således undervejs i forløbet på B-niveau berøre de dele af stoffet, som ligger til grund for B-niveau.

Fx kan det være en mulighed at lade stof fra C-niveau indgå i rapporter, der skrives på B-niveau.

Der kan nævnes følgende muligheder for at lade stof fra C-niveau indgå:

- At inddrage retvinklede trekanter i arbejdet med trigonometri. Fx kan inddrages bevis for Pythagoras' læresætning som eksempel på et simpelt geometrisk bevis. En sådan inddragelse af stof fra C-niveau kan være nødvendig, fordi det kan være et stykke tid siden, kursisten har arbejdet med trigonometri, og det kan være en støtte i tilegnelsen af trigonometrien. Inddragelse af stof fra C-niveau betyder naturligvis *ikke,* at stof fra B-niveau kan fravælges.
- At behandle de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktionerne i arbejde med matematiske modeller. En indgang til arbejdet med matematiske modeller på B-niveau kan fx indledes med en meget kort gennemarbejdning af de lineære funktioner, eksponentielle funktioner og potensfunktioner. Dette kan være afsæt til behandlingen af funktionerne, fx vedrørende monotoni, definitions- og værdimængde og logaritmefunktioner.
- I statistikforløb at have øje for grundlæggende statistiske deskriptorer i forløb i statistik. Forløb i statistik kan fx tilrettelægges, så de statiske deskriptorer, der behandles på C-niveau, også berø-

res på B-niveau. Også her betyder evt. inddragelse af stof fra C-niveau naturligvis *ikke*, at stof fra B-niveau må fravælges.
- Man bør være opmærksom på, at mens statistik på C-niveau indgår i både mundtlig og skriftlig eksamen, så indgår emnet på B-niveau kun i den mundtlige eksamen.
- På grund af kursisternes meget forskellige situationer med hensyn til eksamen på B-niveau kan det også her være en mulighed med en målrettet indsats vha. værkstedstimer.

Der bør til mundtlig eksamen ikke stilles eksamensspørgsmål alene i stof fra C-niveau.

4.3 Den skriftlige prøve

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det: "Til den skriftlige prøve gives der fire timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål. Prøven er todelt. Første delprøve skal besvares uden brug af andre end særligt tilladte hjælpemidler. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf. Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler. Kommunikation med omverdenen er ikke tilladt. Endvidere er brug af internettet ikke tilladt. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et CAS-værktøj, der kan udføre symbolmanipulation, jf. pkt. 3.3."

De stillede prøvesæt siden 2007 illustrerer dels omfang og opbygning af sådanne sæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være. De stillede sæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt findes på Undervisningsministeriets hjemmeside.

4.3.1 Formulering og besvarelse af eksamensopgaver

I delprøven med hjælpemidler må kursisterne altid anvende deres værktøjsprogrammer i løsning af opgaverne. I afsnittet om helhedsindtrykket er beskrevet de væsentligste krav til udformning af en eksamensbesvarelse. På www.uvmat.dk ligger et omfattende autentisk materiale om skriftlighed i matematik, herunder om hvorledes samme opgave kan besvares til fuldt point med brug af forskellige metoder og forskellige værktøjsprogrammer.

Brug af ord som 'skitse' og 'tegn' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlige for opgavens besvarelse.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'beregn skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at kursisterne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske kontra numeriske og grafiske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte kursisterne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode, samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl.

Det forventes ligeledes, at kursisterne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. I delprøven med hjælpemidler kan der optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille henholdsvis lineære, eksponentielle og potensmodeller ud fra data ved brug af regression, men det forventes ikke ved den skriftlige eksamen, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. Fx vil symbolet $f(x)$ både kunne anvendes til at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Der anvendes som standard dansk decimalkomma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser. Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

4.3.2 Første delprøve

Til første delprøve forventes kursisten at kunne:

Forståelsesindhold:

- Opstille enkle formler og ligninger
- Redegøre for konstanternes betydning i det grafiske forløb for første- og andengradspolynomier samt eksponentielle funktioner
- Fortolke af konstanter i lineære og eksponentielle vækstmodeller
- Anvende viden om fordoblings- og halveringskonstant for eksponentiel vækst
- Anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- Fortolke værdien af afledet funktion
- Aflæse vaksthastighed grafisk
- Anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal

Formelindhold:

- Løse simple første- og andengradsligninger
- Anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk
- Sætte tal ind i formler
- Anvende Pythagoras' læresætning
- Foretage beregninger i ensvinklede trekanter
- Isolere ukendte størrelser
- Bestemme regneforskrifter for lineære og eksponentielle funktioner
- Differentiere polynomier, e^x, $\ln(x)$ og x^a, herunder $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$
- Anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- Bestemme en tangentligning
- Bestemme integraler af polynomier, e^x, x^a og $\frac{1}{x}$
- Anvende de regneregler for integration, som er beskrevet i kernestoffet

4.3.3 Bedømmelsen af opgavebesvarelserne

I alle prøvesæt til skriftlig eksamen i matematik indgår de enkelte spørgsmål med samme vægt i bedømmelsen. Det er tydeligt markeret, hvad der forstås ved et spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål vil der indgå både en vurdering af den matematiske korrekthed, og om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. I alle skriftlige prøvesæt er dette *helhedsindtryk* beskrevet i de følgende fem kategorier:

- *Tekst*. Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.
- *Notation og layout.* Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.
- *Redegørelse og dokumentation*. Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.
- *Figurer*. I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.
- *Konklusion*. Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

4.4 Bedømmelseskriterier og taksonomi

Bedømmelsen er altid en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål, som er angivet i pkt. 2.1. I læreplanens afsnit 4.3 er givet en systematisk liste over, hvilke specifikke matematiske kompetencer man kigger efter.

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, *som er relevante* for pågældende eksamensspørgsmål. Ved den mundtlige prøve indgår en eventuel rapport ikke i bedømmelsen. Der tages alene hensyn til den mundtlige præstation. Når bedømmelsen er knyttet til de faglige mål, betyder det også, at den tager udgangspunkt i, hvad der grundlæggende karakteriserer pågældende niveau.

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse. Når der *afgives karakterer*, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. Som et bilag til undervisningsvejledningen ligger på samme side karakterbeskrivelser, der i skematisk form viser, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på B-niveau.

4.5 Karakterbeskrivelse af karaktererne 02, 7 og 12

Hf B Mundtligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål.Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan diskutere rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teori	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et simpelt matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematiske symboler.	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller kan formidle viden om et område, hvor matematik anvendes.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik.

Hf B Skriftligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan redegøre for og anvende modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om anvendelse af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende it-værktøjer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter