Matematik B - Stx
Undervisningsvejledning
Juli 2008

Vejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens enkelte punkter samt en række paradigmatiske eksempler på undervisningsforløb. Vejledningen er et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse. Det er derfor hensigten, at den ændres forholdsvis hyppigt i takt med den faglige og den pædagogiske udvikling.
Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Denne 2. udgave indeholder især ændringer i afsnit 4 om evaluering.

Indholdsfortegnelse

0. Introduktion til vejledningen

På fagets side på [fagets side på emu'en] er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration. Læseren opfordres ligeledes til at konsultere vejledningerne til de øvrige niveauer.

1. Identitet og formål

Læreplanens afsnit om identitet: "*Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.*"

Læreplanens afsnit om formål: "*Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.*"

2. Faglige mål og fagligt indhold

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret de faglige mål, som eleverne skal opnå i undervisningen i matematik B-niveau. De faglige mål er grundlaget for både skriftlig og mundtlig eksamen.

De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3. I undervisningen vil disse to kategorier af fagligt stof ofte være vævet sammen. I læreplanens omtale af det supplerende stof hedder det: "*Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i faget matematik, herunder samspillet med andre fag, skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole.*
For at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 1/3 af undervisningen, bl.a. omfatte" en række nærmere specificerede kategorier af emner.

I det følgende er de tre dele af hovedafsnit 2 skrevet sammen.

2.a Formler og ligninger

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne "*håndtere simple formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, kunne redegøre for foreliggende symbolholdige beskrivelser af* *variabelsammenhænge og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold*".

Håndtering af variabelsammenhænge introduceres bedst gennem eksemplarisk materiale (se Eksempel 201), der leder frem til fortrolighed med matematisk notation, definitioner og begreber. Således er verbale og symbolske repræsentationer i spil fra første færd.

I arbejdet med formler, ligninger og symbolholdige udtryk vælges et eksempelmateriale, så eleverne får indtryk af matematikkens mange anvendelser i andre fag samt af matematikkens beskrivelseskraft i håndtering af sammenhænge mellem variable, der er knyttet til virkelige fænomener. Inddragelse af matematik-historiske perspektiver på matematikkens anvendelse af symbolholdigt sprog kan give eleverne indsigt i, hvorledes matematikkens symbolholdige sprog er trådt ind på scenen som et værktøj, der kan sammenfatte antagelser og viden fra matematik selv eller fra andre fag i kompakt form. "*Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt*", hedder det i læreplanens afsnit 1. Dette kan eksempelvis ske ved at lade eleverne møde eller direkte arbejde med klip fra ældre matematiske tekster.
Anvendelse af symbolholdigt sprog indebærer bl.a., at eleverne kan redegøre for, hvorledes simple formler fremkommer, når der indføres passende betegnelser for konstanter og variable størrelser, og at de er i stand til selv at opstille formler (se Eksempel 123) på grundlag af en sproglig fremstilling af nogle enkle sammenhænge, der forbinder de forskellige størrelser. Endvidere at de med ord kan forklare, hvad en formel udtrykker, at de kan isolere ukendte størrelser, og at de kan sætte tal korrekt ind i formler.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: "*formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable*".

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- En glasmontre anbringes som vist på figuren. Bordet udgør bunden og væggene udgør to af siderne i montren. Toppen og det resterende udskæres af en plade på 3 x 2 meter. Der skæres som vist et kvadratisk hjørne med sidelængde x bort. Argumenter for, at montrens rumfang som funktion af siden x kan skrives på formen...
- Af en kugle med radius 10 udskæres en cylinder. På figuren ses et snit gennem cylinderens akse, og dette er indlagt i et koordinatsystem. Gør rede for at cylinderens rumfang er givet ved...
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af strømstyrken I og spændingsforskellen U i en bestemt situation. Det oplyses, at U og I er proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af U, bestem en tilhørende værdi af I og omvendt.
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af den frekvens fog den bølgelængde λ, som nogle radiostationer arbejder med. Det oplyses, at f og λ er omvendt proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af f, bestem en tilhørende værdi af λ og omvendt.
- En pakke har form som en cylinder, se figuren. Cylinderens rumfang er $V = \pi \cdot r^2 \cdot l$, hvor r er cylinderens endefladeradius, og l er længden af cylinderen. Opstil en formel for omkredsen af cylinderen. På grund af krav fra postvæsenet skal der gælde, at summen af længden og omkredsen af cylinderen skal være 250 cm. Opstil en formel der udtrykker dette. Udtryk dernæst rumfanget V som funktion af r.

- Når spinat blancheres, ændrer vitaminindholdet, y, sig (målt i bestemte enheder) efter følgende forskrift: $y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t$, hvor t er tiden. Bestem y for given værdi af t og omvendt. Nitratindholdet i spinat ændrer sig samtidig og følger forskriften: $z = 20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^t$, hvor t er tiden. Bestem nitratindholdet for given værdi af vitaminindholdet.
- Isoler Q i formlen: $y^2 = Q \cdot x - Q \cdot a + k$
- Isoler n i formlen $K_n = K_0\ (1+r)^n$
- 6 forskellige størrelser er forbundet med formlen: $\ln(\frac{k_1}{k_2}) = \frac{E}{R}(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})$. Bestem værdien af den ukendte størrelse, når talværdierne for 5 af størrelserne opgives.
- Det radioaktive stof strontium 90 henfalder med 2,45% pr år. Et laboratorium indkøber 7 g af stoffet i 2004. Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver, hvor mange gram radioaktivt stof, der vil være tilbage om et givet antal år.
- For tovværk gælder, at der er en sammenhæng mellem brudstyrken og tovværkets diameter. For en bestemt type tovværk oplyses, at et tov med diameteren 20 mm har en brudstyrke på 6000 kg, samt at brudstyrken bliver 3,5 gange så stor, når tovværkets diameter bliver dobbelt så stor. Indfør passende betegnelser og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver sammenhængen mellem diameter og brudstyrke.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med it-værktøjer*”.

- Arbejdet med regningsarternes hierarki og brøkregning, med parentesregler, kvadratsætninger og algebraiske omformninger tilrettelægges, så det understøtter arbejdet med den matematiske teori, med matematisering og opgaveløsning, og med håndtering af formler i andre faglige sammenhænge. Det samme gælder udvidelsen af potensbegrebet og diskussion af rodbegrebet. Symbolbehandlende programmer inddrages i arbejdet med mere komplicerede udtryk.
- Ved arbejdet med formeludtryk fra andre fags problemstillinger kan eleverne møde eksponentiel notation og har således behov for at kunne reducere og at kunne håndtere potensudtryk.
- Ligningsløsning med analytiske metoder omfatter brug af nulreglen, løsning af første og andengradsligninger, af to lineære ligninger med to ubekendte samt simple ligninger med de elementære funktioner. Der forudsættes en viden om sammenhængen mellem grad af polynomier og antallet af rødder, samt om faktorisering af 2. gradspolynomier. Således forventes det, at eleverne kan opskrive et eksempel på et 2. gradspolynomium, når rødderne er givet.
- En række matematiske problemer fører frem til opstilling af mere komplicerede ligninger, eksempelvis, hvor der både indgår polynomielle og transcendente udtryk. Sådanne problemer håndteres med matematiske værktøjsprogrammer. Når problemerne hidrører fra matematiske modeller vil det ofte af konteksten eller af en faglig indsigt fra pågældende område fremgå, om der må forventes én eller flere løsninger til ligningen. Ved skriftlig eksamen vil regneforskrifter og ligninger i nøgne matematikopgaver ikke være mere komplicerede, end at symbolhåndterende programmer ved korrekt anvendelse kan give den fuldstændige løsning til den pågældende ligning eller give den fuldstændige løsning på spørgsmål om rødder og nulpunkter.
- Det forventes, at eleverne kan håndtere spørgsmål som:
  - for hvilke tal c har ligningen $f(x) = c$ netop én løsning

- angiv for enhver værdi af konstanten a antallet af løsninger til ligningen ..., hvor konstanten kan indgå forskellige steder i et funktionsudtryk, fx ligningen $x^2+ax+2 = 0$.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: ”for hvilke værdier af x er ... større end / mindre end en given værdi”.

I arbejdet med både komplicerede og mere simple ligninger er grafiske illustrationer vigtige til at skabe overblik og bedre forståelse af problemstillingen. De kan i visse tilfælde være en hjælp til at løse problemet og i alle tilfælde til kontrol med løsningen.

2.b Statistik og sandsynlighedsregning
Ifølge læreplanen skal eleverne kunne: ”*anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog*”.

Statistik er videnskaben om indsamling, håndtering og fortolkning af data fra omverden. Selv på et elementært niveau skal statistik ofte forholde sig til ubearbejdede data, og det ligger i fagområdets natur, at statistiske konklusioner ikke kan opnås og præsenteres med samme grad af sikkerhed, som man ellers er vant til i den øvrige del af matematikundervisningen. Dette skal præge undervisningen, så eleverne får et tydeligt indtryk af statistikkens særlige karakter.

Overalt præsenteres vi for oplysninger og påstande, der baserer sig på forskellige mængder og typer af data. Det kan være formuleringer som: ”Aspirin forebygger hjerteproblemer, viser en ny undersøgelse...”, eller: ”Et rundspørge, som Tv-avisen har foretaget viser, at 2 ud af 3 danskere mener...”. Eksemplarisk materiale af denne type kan være et godt udgangspunkt for en indledende undervisning, for en diskussion af statistikkens metoder samt af spørgsmål som: Hvor sikre er de konklusioner, vi præsenteres for? Undervisningen skal overordnet set medvirke til, at eleverne bedre bliver i stand til at forholde sig kritisk til en formidling af et givet statistisk materiale, samt at de kan stille spørgsmål til kvaliteten af og håndteringen af statistiske undersøgelser.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet*”.

Statistik arbejder med metoder til at håndtere usikkerhed. Men de spørgsmål, man søger svar på, må ikke være præget af uklarhed. Tværtimod er det afgørende, at man så præcist som muligt har gjort sig klart, hvad det er, man vil måle, hvad man gerne vil vide og hvilke antagelser, man i øvrigt gør sig, før arbejdet starter.

Det første skridt ind i statistikken vil normalt være en overvejelse om, hvad troværdige data er. Hvorledes vælger man stikprøver af en population (se Eksempel 220) således, at stikprøven kan siges at være repræsentativ.
Hvordan designer man metoder til at skaffe data, således at man med statistiske metoder kan give troværdige svar på givne spørgsmål?

Gennem undervisningen skal eleverne have mødt så mange eksempler på stikprøve-situationer – herunder stikprøver præget af forskellige former for systematiske fejl (bias), stikprøver, hvor der er skjulte variable på spil (konfundering), og stikprøver, hvor forskellige typer blindtest anvendes – at de kan håndtere problemstillinger som:

– I nyhedsudsendelsen på en lokal tv-station fortælles: "Inden for de sidste timer har en af vore journalister gået rundt i Kolding og spurgt 55 tilfældige forbipasserende om holdningen til en aktuel og meget provokerende kunstudstilling. 35 af de adspurgte ønskede udstillingen lukket. Der er således et massivt pres på byrådet om at gribe ind. Nu afventer vi borgmesterens reaktion."
  - Hvad er populationen, og hvad er stikprøven?
  - Kommenter undersøgelsen og tv-kanalens præsentation af denne.
– Et sundhedsmagasin ønsker at undersøge om store doser vitamintilskud forbedrer sundhedstilstanden. Bladet anmoder de af læserne, som gennem længere tid har taget store doser vitamintilskud, om at skrive ind og fortælle om positive og negative erfaringer med dette. 2754 læsere skriver ind. 93 % fortæller, at de kan spore en vis forbedring af helbredet.
  - Hvad er population, og hvad er stikprøve?
  - Kommenter undersøgelsens metode, og skriv et lille indlæg herom til en avis.
– En bestemt sygdom påvirker de røde blodlegemer og forårsager stor smerte. Et medicinsk præparat til behandling af sygdommen er udviklet, og kvaliteten af præparatet ønskes afprøvet på en population på 300 patienter, der har haft særligt mange smerteanfald.
  - Forklar, hvorfor det ville være en dårlig strategi at lade alle 300 få den nye medicin.
  - Beskriv et forsøg, der kunne give information om pågældende præparats virkning over for smerteanfald.

Eleverne forventes at kunne anvende simple statistiske deskriptorer og simple grafiske præsentationer i en beskrivelse af et datamateriale. Det drejer sig om middeltal, median og kvartilsæt, om boxplot´s og histogrammer, der kan optræde i problemstillinger som:

– For en bestemt gruppe på 15 læger blev det undersøgt, hvor ofte de havde udført et kirurgisk indgreb, der medførte fjernelse af livmoderen. Antallet af operative indgreb var for hver af de 15 læger henholdsvis: 50 33 25 86 25 85 31 37 44 20 36 59 34 28 49
  En gruppe på 10 kvindelige læger blev tilsvarende undersøgt, og blandt disse blev der udført indgreb følgende antal gange: 7 14 25 5 33 29 18 31 10 20
  - Lav i samme koordinatsystem boxplots af hver af de to datasæt.
  - Kommenter undersøgelsen ved hjælp af den grafiske præsentation og størrelserne middeltal, median samt kvartilerne for de to datasæt.
– Givet et histogram over matematiklæreres aldersfordeling. Karakteriser dettes form. Ligger medianen til venstre for, til højre for, eller er den lig med middeltallet? Begrund svaret.
– Givet en computerudskrift af et statistisk materiale og beregninger af: maksimum, minimum, øvre og nedre kvartil, median, middelværdi og eventuelle andre karakteristiske størrelser for datasæt for forskellige sammenlignelige produkter, fx madtyper og kalorieindhold. Der ønskes en sammenligning i form af opstilling af boxplots for produkterne i samme koordinatsystem. Der ønskes en kommentar til den grafiske præsentation.

Histogrammer i eksamensopgaver er baseret på lige brede intervaller, mens de til grund liggende intervaller for sumkurver godt kan have forskellig bredde. Opgaven kan i øvrigt drejer sig om at anvende en grafisk repræsentation af et talmateriale til at svare på forskellige spørgsmål, herunder at aflæse og kommentere kvartilsæt. Da kvartilsæt ikke er entydigt defineret, kan forskellige it-redskaber give lidt forskellige svar, hvilket anses for uproblematisk. Sådanne opgavetyper vil ikke indgå i prøven uden hjælpemidler.

De faglige mål vedrørende statistik og sandsynlighedsregning vil hovedsageligt blive udmøntet gennem det supplerende stof. Ifølge læreplanen skal dette omfatte ”*anvendelse af mindst to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller, indsamling og bearbejdning af data til belysning af en opstillet hypotese*”.

Den sandsynlighedsteoretiske formalisme med udfaldsrum og sandsynlighedsfunktion er ikke en del af det fælles kernestof. Men det enkelte hold kan vælge at gennemføre forløb over elementer af klassisk sandsynlighedsteori og kombinatorik, og så evt. bygge binomialmodeller, urnemodeller, betingede sandsynligheder eller andet ovenpå. Sandsynlighedsbegrebet kan imidlertid også introduceres gennem frekventielle sandsynligheder (i diskrete tilfælde) knyttet til statistiske undersøgelser.

Det formelle begreb ”stokastisk variabel” indgår heller ikke i det fælles kernestof. Men i bestemte forløb kan det være en fordel at introducere stokastisk variabel som et begreb og en notation, der gør det mere enkelt at formulere spørgsmål og opstille formler.

Et datamateriale kan tilvejebringes på mange måder:

- eleverne kan selv via spørgeskemaer, test i idræt eller på anden vis generere det datamateriale, holdet vil underkaste en statistisk analyse
- datamaterialet kan også komme via et samarbejde med andre fag (fx naturvidenskabeligt grundforløb, eksperimentelle fag eller samfundsfag
- man kan også vælge at trække på det omfattende materiale af autentiske data, som findes i en række databanker på nettet. Med moderne it-værktøjer kan sådanne data umiddelbart trækkes ind og gøres til genstand for statistisk behandling.

En statistisk undersøgelse af et materiale har normalt flere trin, hvoraf første trin er af mere deskriptiv karakter. Denne fase giver samtidig bedre muligheder for at kunne stille præcise spørgsmål til det givne materiale. I statistiske undersøgelser formuleres sådanne spørgsmål ofte som hypoteser. Belysning af en opstillet hypotese kan gennemføres på mange måder. Man kan vælge en eksperimentel tilgang med anvendelse af statistiske it-værktøjer. Men et hold kan naturligvis også vælge at fordybe sig i elementer af klassisk hypotesetest. Mange af de forløb, man kunne vælge at gennemføre, har et teoretisk fundament, der går betydeligt ud over det gymnasiale niveau. Det er ikke tanken, at man i sådanne forløb skal søge at nå til bunds i en forståelse af den fordeling, man arbejder med, eller eksempelvis af det formelle grundlag for hypotesetest. I de fleste tilfælde vil det være mere hensigtsmæssig at inddrage eksperimentelle metoder og præsentere det matematiske begrebsapparat, så det spiller sammen med intuitionen.

Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes på rent matematikfagligt grundlag:

- Et forløb om opinionsmålinger (se Eksempel 220) kan både tilrettelægges i grundforløbet og i en studieretning i et samarbejde med samfundsfag. Datamaterialet kan indsamles i spørgeskemaer eller hentes fra databaser eller opinionsmålingsinstitutter. Gennem forskellige former for simuleringer kan der arbejdes med test af hypoteser og med graden af sikkerhed, hvormed resultater præsenteres. Både randomfunktioner i lommeregnere og regneark og mere avancerede it-værktøjer kan anvendes.
- Datamateriale fra større spørgeskemaundersøgelser (se Eksempel 221) kan give grundlag for, at eleverne selv opstiller hypoteser om sammenhænge, og om hvorvidt forskellige dataserier udtrykker reelle forskelle mellem køn, aldersgrupper, meningsgrupper osv. eller er udtryk for statistiske tilfældigheder. It-værktøjer kan anvendes til dette.
- Måleserier genereret fra forsøg i eksperimentelle fag, eller målinger foretaget på eleverne i idræt eller biologi – (fx om følsomhed på ryg og hænder, om evnen til at smage forskel (se Eksempel 283), om reaktionshastighed, træfsikkerhed osv.) – kan give anledning til en statistisk sammenligning af måleserier på grundlag af hypoteser, som eleverne formulerer. Sammenligninger kan både ske ved eksperimenterende arbejdsformer på it-værktøjer, ved et binomialtest, ved at introducere χ^2-test eller på anden vis.
- Et forløb med random-walk modeller (se Eksempel 282) kan give en eksperimenterende tilgang til at undersøge normalfordelinger.
- Et forløb om arvelighed (se Eksempel 210) kan tilrettelægges, så fokus er på simple betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov. Men man kan også gennemføre et lidt længere forløb om retsgenetik og dna-profiler (se Eksempel 211), hvor der teoretisk bygges på Bayes' sætning, samtidig med at it-værktøjer udnyttes til analyse af datamaterialet.
- Et forløb om Simpsons paradoks kan gennemføres alene i matematik eller sammen med andre fag, der også ønsker at sætte fokus på dette problem ved præsentationen af simple statistiske oplysninger. Forløbet kan allerede gennemføres i 1. g, da det hovedsageligt bygger på vejet gennemsnit.
- Et hold kan også vælge at gennemføre forløb med en sandsynlighedsteoretisk undersøgelse af forskellige former for spil og lotto, hvor både binomialmodeller og urnemodeller kan komme i spil.
- Risikovurdering indgår mange steder i et moderne samfund og kan give materiale til forløb om forsikringsmatematik og forløb om vurdering af sikkerheden på avancerede virksomheder.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

2.c Funktioner og grafer, modellering af variabelsammenhænge

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne "*anvende simple funktionsudtryk i modellering af givne data, kunne foretage simuleringer og fremskrivninger og forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne*".

Kernestoffet omfatter ifølge læreplanen: "*begrebet $f(x)$, karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner samt karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression*".

Arbejdet med sammenhænge mellem variable (se Eksempel 201) omfatter både matematiske metoder til behandling af et autentisk talmateriale og modeller, hvor variabelsammenhænge er fastlagt ved et formeludtryk, som det fx er situationen i optimeringsopgaver. Begge tilfælde giver naturlige oplæg arbejdet med funktionsbegrebet. Håndtering af autentisk talmateriale vil naturligt inddrage it-hjælpemidler. Hvis det er muligt, kan diskussioner om eventuelle årsagssammenhænge og anvendte idealiseringer ved modelopstillingen foregå i et samarbejde med andre fag.

De elementære funktioner, der er omtalt i læreplanens afsnit om kernestof, kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper. Eksempelvis kan tredjegradspolynomier blive præsenteret under arbejdet med optimeringsopgaver, og eksponentielt voksende og aftagende funktioner kan blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald.

Men de elementære funktioner kan også behandles i undervisningsforløb, der tilrettelægges således, at man først introducerer og studerer elementære funktioners karakteristiske egenskaber og siden inddrager disse i en modelleringssammenhæng. Eksempelvis kan potensfunktioner introduceres i sammenhæng med en generalisering af potensbegrebet, og funktionsklassens karakteristiske egenskaber kan blive studeret i et rent matematisk forløb, for siden at blive inddraget i modellering af biologiske og fysiske fænomener.

Studiet af de elementære funktioner vil ofte foregå i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modelleringsopgaver. Eksempelvis kan logaritmefunktioner blive introduceret tidligt i forløbet, således at eleverne bliver fortrolige med funktionernes regnetekniske og skaleringsegenskaber og bliver i stand til at håndtere formler, hvor disse egenskaber anvendes som i pH-skalaen i kemi, i decibelskalaen i fysik, i formler for stjerners størrelsesklasser i astronomi eller i Richterskalaen i naturgeografi. Senere i hele forløbet kan man vende tilbage og eksempelvis gennemføre et forløb over logaritmefunktionernes historie.

De elementære funktioners karakteristiske egenskaber beskrives med begreber som definitionsmængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema og asymptoter. Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, studeres disses betydning for det grafiske forløb. Til de karakteristiske egenskaber hører yderligere:

- sammenhængen mellem grad og antal nulpunkter for polynomier
- sammenhængen mellem diskriminant, toppunktets beliggenhed og antal nulpunkter for 2. gradspolynomier
- begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant, og sammenhængen mellem a^x og e^{kx} for eksponentielle udtryk
- regneregler for logaritmefunktioner
- sammenhængen mellem %-vækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner.

Logaritmiske koordinatsystemer er ikke et selvstændigt emne, men eleverne skal kunne aflæse på grafer i logaritmiske koordinatsystemer, da de i mange sammenhænge og i andre fag vil kunne møde sådanne.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet endvidere "*principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering*". Funktionsudtryk anvendes både til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og variabelsammenhænge. I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer mv. Dette er omtalt under afsnittet om anvendelser af matematik.

Modeller til beskrivelse af et talmateriale inviterer til spørgsmål om prognoser, til spørgsmål som: Hvad sker der med y-værdierne, når x-værdierne bliver meget store?, eller til spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer. Der kan ligeledes være tale om spørgsmål vedrørende beregninger af ukendte størrelser ud fra visse givne talværdier.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- Givet et datamateriale. Det oplyses, at talmaterialet kan beskrives ved en matematisk model af typen: $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot a^x$, $f(x) = b \cdot e^{kx}$ eller $f(x) = b \cdot x^a$.
  Bestem a og b, henholdsvis k og b.
  Hvornår vil befolkningstallet / koncentrationen / strålingen overstige / komme ned under en given værdi? (Den uafhængige variable behøver naturligvis ikke være tiden.)
  Samt yderligere spørgsmål til modellen ud fra de karakteristiske egenskaber ved pågældende funktionsudtryk.
- I en matematisk model for befolkningstallets udvikling i New York (målt i tusinder) i årene 1790 – 1900 beskrives dette ved følgende udtryk: $f(t) = 36{,}3 \cdot 1{,}044^t$, hvor t angiver antal år efter 1790.
  Hvad angiver tallet 36,3?
  Hvor stor var den årlige procentvise tilvækst i befolkningstallet ifølge modellen?
  Indbyggertallet udviklede sig faktisk i årene 1790 – 2000 efter følgende opgivne datamateriale. Kommenter modellen ud fra disse oplysninger.
- Grafen for 2. gradspolynomier kan anvendes til modellering af visse linjer i bygningskonstruktioner. En bestemt tunnel har et parabelformet tværsnit med opgivne mål. Indlæg et passende koordinatsystem, og undersøg, hvilke dimensioner lastvogne maksimalt må have for at kunne køre igennem.

2.d Afledet funktion og stamfunktion, anvendelse af differential- og integralregning
Ifølge læreplanen skal eleverne kunne: ”*anvende differentialkvotient og stamfunktion for simple funktioner og fortolke forskellige repræsentationer af disse*”.
Kernestoffet inden for emnet differentialregning omfatter ifølge læreplanen: ”*definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt differentiation af* $f+g$, $f-g$ *og* $k \cdot f$, *udledning af udvalgte differentialkvotienter*”. Endvidere: ”*monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient*”.

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem – som det ofte er tilfældet med optimeringsopgaver – eller af fysiske, kemiske, biologiske og andre love og sammenhænge. Opstillingen af sådanne modeller og besvarelsen af de tilhørende spørgsmål bygger ofte på informationer om væksthastighed og marginalbetragtninger. Håndtering af disse problemstillinger forudsætter derfor, at eleverne er fortrolige med de emner, som kernestoffet omfatter.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- På figuren ses en kasse uden låg. Den skal konstrueres, så den er 1,6 gange så lang som bred og har et rumfang på 150 dm^3.
  - x angiver kassens bredde. Opstil et matematisk udtryk for overfladearealet som funktion af kassens bredde.

- Bestem dimensionen, så kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

– I en model for den fremtidige udvikling af atmosfærens kuldioxid-indhold Q (målt i mia. tons) antages det, at væksthastigheden for kuldioxid-indholdet er givet ved

  $\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1{,}02^t$, hvor t er tiden målt i år efter ...
  - Angiv væksthastigheden i ...
  - Hvornår er væksthastigheden blevet dobbelt så stor som i ....

– I en bestemt kemisk blanding udvikler bromkoncentrationen sig som en funktion af tiden (målt i sekunder) givet ved forskriften: $f(t) = 3.00 - 3.00 \cdot e^{-0.0166\,t}$.
  - Hvor lang tid går der før koncentrationen er nået over...?
  - Bestem den hastighed hvormed koncentrationen ændrer sig til tiden t = 100.

– En funktion er bestemt ved forskriften: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$, hvor a er et tal. Bestem monotoniforhold for f. For hvilke tal a har f netop tre nulpunkter?

I mange anvendelsesopgaver vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de typer af regneforskrifter, der er behandlet i undervisningens gennemgang af de elementære funktioner og regnereglerne for differentiation. I sådanne tilfælde forventes det ifølge læreplanen, at eleverne kan: "*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer, herunder håndtering af mere komplekse formler og bestemmelse af differentialkvotient og stamfunktion for mere komplicerede funktionsudtryk.*". Det kan være opgaver som:

– Bestem den fart v (målt i km / t), der tillader flest biler pr minut at passere en bro, når antallet N af biler, som en funktion af v er givet ved: $N(v) = \dfrac{12v}{0{,}008v^2 + 0{,}2v + 4}$

– Indlandsisens alder, målt i år, er givet ved en funktion af dybden af isen. Et bestemt sted er denne funktion givet ved regneforskriften: $f(t) = 109400 - 13660 \cdot \ln(3005 - x)$.
  - I hvilken dybde findes is, der blev dannet for 8000 år siden?
  - Bestem $f'(1250)$, og gør rede for betydningen af dette tal.

– En bestemt pludselig tilførsel af spildevand til et vandløb kan modelleres med funktionen $f(t) = 97{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}39\,t}$, hvor $f(t)$ angivere ilt-underskuddet (målt i mg / liter) til tiden t (målt i døgn) efter udslippet fandt sted.
  - Hvor stort er ilt-underskuddet 5 døgn efter udslippet
  - På hvilket tidspunkt er ilt-underskuddet størst

– En pige befinder sig i vandet ved position A og skal frem til position B på land, se figuren. Hun svømmer med farten 0,4 m/s og skal frem til position B på land. Hun går med farten 1,4 m/s. Gør rede for at tidsforbruget ved at følge den rute, der er angivet på figuren kan beskrives ved: $f(x) = \ldots$ Bestem den rute, der ville give pigen det mindste tidsforbrug.

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation, så de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver. Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning, samt at kende sammenhængen mellem f', monotoniforhold og lokale ekstrema.

I undervisningen kan marginalbetragtninger og begrebet væksthastighed introduceres på mange måder. Det kan fx ske i forbindelse med modelleringsopgaver. Men man kan også vælge at tilrettelægge undervisningen, så man først opnår fortrolighed med differentialregningens teori og håndværk for siden at fordybe sig i anvendelserne. Ofte vil det ske i en vekselvirkning, hvor man undervejs fordyber sig i, hvorledes man i økonomi, fysik eller andre naturvidenskabelige fag ræsonnerer ved hjælp af infinitesimale betragtninger og dermed søger at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer. På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, men det er ikke tanken at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende indebærer studiet af sammenhængen mellem f' og begreber som monotoniforhold og lokale ekstrema inddragelse af kontinuitetsbegrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling.

Arbejdet med at tilegne sig indsigt i differentialregningen foregår i en stadig vekselvirkning mellem fordybelse i teorien og udvikling af de håndværksmæssige færdigheder i anvendelsen af differentialregningen. For til fulde at forstå begreber som væksthastighed og marginalbetragtninger må man jævnligt vende tilbage til det teoretiske grundlag.

Den enkelte lærer vælger selv, hvilke af regnereglerne og hvilke af de elementære funktioners differentialkvotienter holdet vil give en grundig teoretisk behandling.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal alle hold arbejde med: "*ræsonnement og bevisførelse inden for differentialregning*". Dette kan gribes an på mange måder. Det kan være større sammenhængende forløb eller flere mindre forløb, hvor man vælger at:

- fordybe sig i tretrins-reglen for udledning af differentialkvotienter (se Eksempel 121)
- fordybe sig i grænseværdibetragtninger og kontinuitet
- fordybe sig i beviserne for maks-min-sætningen og for monotonisætningen
- studere betydningen af f''
- arbejde med numeriske metoder som Newton-Raphsons metode og undersøge, hvornår algoritmen virker
- studere elementer af l'Hospitals regler
- studere approksimerende polynomier – med inddragelse af integralregning

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

Integralregning introduceres på B-niveau gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet. Nogle hold kan vælge at gennemføre et sammenhængende forløb om middelværdisætningen og monotonisætningen og anvendelser af disse til bestemmelse af mængden af stamfunktioner til en given kontinuert funktion. Andre vil foretrække at lægge hovedvægten på anvendelsen af integralregningen og vil derfor for hurtigt at komme frem til anvendelserne, lægge mindre vægt på den teoretiske side af sagen.

Kernestoffet inden for dette emne omfatter ifølge læreplanen: "*stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, anvendelse af integralregning til arealberegning af punktmængder begrænset af grafer for ikke-negative funktioner*".

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed hermed, at de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver inden for disse emner. Det drejer sig både om at bestemme stamfunktioner, arealer og bestemte integraler og at kende sammenhængen mellem stamfunktion og areal.
Det forventes i øvrigt, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- Bestem til en funktion f med forskriften: $f(x) = ax + b$, $\quad f(x) = b \cdot e^{kx}$, $\quad f(x) = b \cdot x^a$ en stamfunktion og arealet af den punktmængde der er afgrænset af grafen og linjerne...
- Bestem $\int (3x^4 - x^3 + 1)\,dx$, $\quad \int \sqrt{x}\,dx$, $\quad \int 2{,}3 \cdot e^{-0{,}7x}\,dx$
- Bestem $\int_0^{25} 6{,}0 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}052^t\,dt$
- Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = 2x + e^{-x}$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger $y = 0$, $y = 2x$ og $x = 4$ et område, der har et areal. Bestem dette areal.
- Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = x^2 - 6x + 10$ afgrænser sammen med linjen $y = 2$ i første kvadrant et område M, der har et areal. Bestem arealet.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal dette bl.a. omfatte: "*matematiske modeller, herunder opstilling af matematiske modeller ved hjælp af differentialkvotient*". Blandt den store mængde af eksempler holdet kan arbejde med, kan nævnes:

- Et forløb om vækstmodeller (se Eksempel 293) kan behandle og sammenligne forskellige former for populationsvækst, fra tilfælde med konstant væksthastighed over tilfælde med en væksthastighed, der er proportional med et bestemt funktionsudtryk eller proportional med populationens aktuelle størrelse, frem til en evt. perspektivering gennem diskussion af betydningen af konstant emigration eller af en naturlig ressourcegrænse.
- Ud fra en eksperimentel måling af, hvorledes temperaturen ændrer sig i en kop kaffe eller en varm jernklods, der ligger til afkøling, kan eleverne opnå en vis indsigt i Newtons afkølingslov (se Eksempel 205) og i den differentialligning, der beskriver fænomenet.
- Ud fra en opmåling af, hvorledes en solsikke vokser som funktion af antal dage, der er gået siden frøet blev sået, kan eleverne opnå en vis indsigt i logistisk vækst og i den differentialligning, der beskriver fænomenet.
- modellering af dynamiske systemer inden for biologi, kemi eller samfundsfag med anvendelser af SD-diagrammer (se Eksempel 294) (SD: System Dynamics) kan give eleverne indsigt i, hvorledes differentialkvotienten altid anvendes, når man beskriver ændringer i en given tilstandsvariabel.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

2.e Geometri

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne "*redegøre for foreliggende geometriske modeller og håndtere geometriske problemstillinger*".

I folkeskolen har eleverne arbejdet med geometrisk modellering og løsning af problemer med geometrisk indhold ved tegning og måling, konstruktion og simple beregninger. Men eleverne starter ofte i gymnasiet med meget forskellige forudsætninger. Et fælles grundlag for holdets arbejde med geometri kan tilvejebringes gennem forskellige kortere undervisningsforløb. Det kan være elementærgeometriske forløb, der illustrerer opbygningen af en matematisk teori, og hvor fokus er på det matematiske ræsonnement. Det kan også være eksperimentelle forløb, hvor dynamiske geometriprogrammer inddrages. Sætningerne om vinkelsum i trekanter og i n-kanter kan lægge op til induktive metoder, mens beregninger af arealer i kvadrater, rektangler, trekanter, parallelogrammer, trapezer mv. kan lægge op til deduktive metoder. Med udgangspunkt i elevernes viden om Pythagoras' læresætning, kan der tilrettelægges et forløb om bevisteknik, hvor der søges på nettet eller i litteraturen efter forskellige beviser, som eleverne i par eller grupper tilegner sig og gennemgår for de øvrige i klassen.

Uanset hvilke former, der vælges, forventes det, at eleverne opnår kendskab til de grundlæggende begreber og betegnelser fra den klassiske geometri, således at de kan håndtere følgende ved en skriftlig eksamen:

- Figuren viser en trekant ABC, hvor $\angle C = 38°$, $h_a = 35$, $m_a = 37$. Fodpunktet for h_a og m_a kaldes henholdsvis H og M, og det oplyses at $\angle AMC$ er spids. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekant ABC.
- En trekant har sidelængder... Bestem trekantens vinkler. Bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_A .

Arbejdet med geometriske og trigonometriske problemer vil ofte tage udgangspunkt i givne tegninger. Men elevernes kompetence til at behandle sådanne problemer kan yderligere styrkes ved at opøve evnen til at tegne modeller, der kan anvendes som grundlag for beregninger, ud fra givne oplysninger. Udgangspunktet kan være problemer som højdemåling af bygninger eller afstandsmåling i et landskab, og forlægget kan være tegninger, fotografier eller egne opmålinger. I nogle forløb kan det være naturligt at inddrage klip fra matematikhistoriske tekster. I andre kan det eksempelvis være moderne tekster, der fx vedrører konstruktion af bygninger.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: "*forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter*". Det forudsættes endvidere, at elevernes viden om den Pythagoræiske læresætning fastholdes. Beregninger kan ligeledes foretages i dynamiske geometriprogrammer. De trigonometriske funktioner indføres med præcise definitioner og ikke alene som et beregningsværktøj.

Begrebet kongruens omtales i sammenhænge, hvor det naturligt indgår som en del af et matematisk ræsonnement. De særlige egenskaber, der knytter sig til trekantens forskellige linjer, indskrevne og omskrevne cirkler, kan inddrages i mange forskellige typer forløb, men udgør ikke en del af det fælles kernestof.

2.f Matematisk ræsonnement og teori

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne "*gennemføre simple matematiske ræsonnementer og beviser*".

Eleverne skal møde den matematiske teori og selv arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet og inden for alle områder af undervisningen. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem "hvad man ved", "hvad man antager" og "hvad man ønsker at vide". Det gælder uanset om emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. I skriftlige rapporter og mundtlig fremstilling skal de kunne fremlægge denne indsigt på en sådan måde, at det matematiske argument og den matematiske tankegang fremstår klart. Det kan eksempelvis dreje sig om:

- et samarbejde i 1. g med naturvidenskabeligt grundforløb om matematisk modellering af givne data.
- en ren matematik-rapport i 2. g over et forløb om udledning af forskellige differentialkvotienter.
- en statistisk analyse i 3. g i et forløb sammen med samfundsfag.

Kernestoffet omfatter ifølge læreplanen specifikke krav om ”*udledning af udvalgte differentialkvotienter*”. Derudover skal det supplerende stof ifølge læreplanen omfatte ”*ræsonnement og bevisførelse inden for differentialregning og andre udvalgte emner*”.

Uanset hvilke emner der arbejdes med på det enkelte hold, forventes det, at eleverne når frem til at kunne skelne mellem forudsætninger, definitioner og sætninger, samt at de kan gennemføre nogle centrale beviser inden for forskellige af fagets områder. Denne side af matematikkens væsen kan introduceres allerede i 1. g gennem et eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for elevеksperimenter, for en diskussion af kategorier som forudsætninger, sætning og bevis samt en diskussion af det induktive contra det deduktive, og som samtidig rummer fascinerende problemstillinger. Det kan være et materiale om Eulers polyedersætning, Goldbachs formodning, broerne i Königsberg, isoperimetriske problemer, simple 1-fejls detekterende koder som ISBN-koder, sandsynlighedsteoretiske paradokser, simple LP-problemer (LP = lineær programmering) osv. Senere i gymnasieforløbet kan man vælge at fordybe sig i et eller flere af disse.

Men der er i øvrigt stor frihed til at man lokalt selv vælger inden for hvilke områder, man går i dybden med den matematiske teori:

- I arbejdet med opstilling og omformning af formeludtryk, ved løsning af ligninger og ved introduktion af nye matematiske emner kan der sættes fokus på betydningen af at have og betjene sig af et præcist matematisk sprog, som er internationalt, og som alle fagets udøvere kender. Der kan arbejdes med et eksempelmateriale præget af mangler i den matematiske præcision. Eller der kan søges på nettet efter matematiske fremstillinger fra alverdens lande.
- Allerede i grundforløbet kan man diskutere den forskellige karakter af de regler, som udnyttes og som ofte kendes fra folkeskolen. Et eksempelmateriale med både korrekte og forkerte metoder til løsning af ligninger – herunder såkaldt falske løsninger på CAS-værktøjer – kan fremme indsigten i reglerne.
- Udnyttelse af regressionsfaciliteter i matematisk modellering (se Eksempel 201) kan både give anledning til, at der – evt. i et samarbejde med andre fag - sættes fokus på kategorierne: ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide” samt på forskellen mellem en matematisk sammenhæng mellem variable og en årsagssammenhæng. Men det kan også give anledning til et lille forløb om, hvilket ræsonnement der kan ligge bag begrebet ’bedste rette linje’.
- I den indledende geometri (se Eksempel 111) er der rige muligheder for at eleverne selv arbejder med at formulere enkle sætninger, gennemfører små beviser og herved opnår indblik i matematikkens væsen. En diskussion af gradtallet for sfæriske trekanter eller af parallelitet i perspektivgeometri kan sætte fokus på betydningen af at gøre sig forudsætningerne for det matematiske ræsonnement klart. Senere kan man evt. vende tilbage og gennemføre forløb over andre dele af den klassiske geometri eller over et emne som perspektivgeometri (se Eksempel 307). Emnerne appellerer til, at eleverne selv tegner, eksperimenterer og leder efter svar.
- Udledning af de trigonometriske relationer for vilkårlige trekanter eller af betingelserne for løsning af 2. gradsligningen og af løsningsformlen, når der er reelle løsninger, giver muligheder for at sætte fokus på, hvorledes et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af implikationer.
- Udledning af udvalgte differentialkvotienter for de elementære funktioner indebærer også, at man vælger, om man skal tage visse formler (for differentiation af produkt, henholdsvis af sammensat funktion) for givet, eller om beviset for disse skal indgå i forløbet.

- Inden for emnet differentialregning kan man gennemføre forløb over maks-min-sætningen, middelværdisætningen og monotonisætningen. Man kan også tage udgangspunkt i middelværdisætningen og gennemføre forløb over betydningen af f''. En række af sådanne forløb rummer eksempler på indirekte beviser, beviser ved induktion, eksistensbeviser kontra konstruktive beviser og forskelle mellem implikation og bi-implikation.
- Arbejdet med integralregningen kan følges op af et forløb med beviset for fundamentalsætningen og beviset for sætningen om mængden af stamfunktioner til en given kontinuert funktion. Man kan også arbejde med forskellige integrationsteknikker og spørge: Hvilke funktionsklasser kan man finde stamfunktioner til? Eller man kan lave et deduktivt forløb over definition af og egenskaber ved den naturlige logaritmefunktion.
- Megen matematisk modellering vil have nytte af at tage udgangspunkt i "hvad man ved", hvad man antager" og "hvad man ønsker at vide". Identifikation af variable, viden om relationer mellem disse, samt antagelser om årsagssammenhænge vil ofte bygge på en faglig viden fra andre fag. Men matematiske metoder er afgørende for at oversætte problemet til ét, som man kan håndtere. Det kan dreje sig om fysiske eller kemiske love, ræsonnement om arvelighed og andre genetiske spørgsmål på grundlag af Bayes sætning, opstilling af LP-modeller til optimering af en ressourceudnyttelse under visse ydre betingelser eller andet.
- Et samarbejde med et andet fag kan begrunde, at man bruger hovedparten af kræfterne på at fordybe sig i den indledende teori for opstilling, anvendelse og løsning af differentialligninger.
- Diskussion af tallenes egenskaber kan give anledning til forløb over nogle egenskaber ved primtallene. Men det kan også give anledning til forløb om uendelighedens paradokser. Sådanne forløb indeholder ofte ret avancerede matematiske ræsonnementer – beviser, der arbejder med modstrid eller med matematisk induktion – og kræver derfor en vis matematisk modenhed, hvis eleverne skal have fuldt udbytte.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori, og først tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor netop sætningens forudsætninger er nødvendige.

2.g Anvendelser af matematik – matematik i samspil med andre fag

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne "*demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling*". Endvidere skal de kunne "*demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling*".

At demonstrere viden om matematikanvendelse betyder, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. Der ligger således ikke heri en forestilling om, at eleverne selvstændigt kan tage fat på en matematisk problembehandling og modellering af et materiale eller en problemstilling, der foreligger i umiddelbar og ubearbejdet form.

Men gennem et samarbejde med eller ved at inddrage viden fra andre fag kan man overveje, hvilke forenklinger, idealiseringer og abstraktioner der er acceptable i den givne situation, og som danner grundlag for en matematisering. Ved at generalisere disse metoder kan der vindes indsigt i muligheder og begrænsninger ved matematisk modellering. Men man kan ikke forvente, at eleverne opnår en egentlig rutine i matematisk modellering af komplekse problemstillinger.

I afsnit 3.4 vil matematikanvendelse i både grundforløb og studieretningsforløb blive eksemplificeret.

At demonstrere viden om, hvordan matematik har udviklet sig i et samspil med det omgivende samfund, betyder tilsvarende, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. Der ligger således ikke heri en forestilling om, at eleverne selvstændigt kan redegøre for, hvorledes hvert af de matematiske områder, de har arbejdet med, er opstået og har udviklet sig som følge af samfundets udvikling, og hvorledes matematikkens egen udvikling har virket tilbage på åndsliv, videnskab og teknologi.

Men gennem et samarbejde med andre fag eller ved at inddrage viden fra andre fag kan der gennemføres eksemplariske forløb, der i et koncentrat viser fagets rolle i menneskehedens bestræbelser på at magte naturens kræfter og forstå sin egen og Jordens oprindelse, opnå indsigt i himmellegemernes bevægelser og i lovene for at indse og afbilde det, vi ser, rejse mægtige bygningsværker og turde rejse ud over havenes horisont, at måle og veje, at skabe uhyrlige våben, men også at bidrage til velstand og til at sætte argumentet i centrum for menneskenes civiliserede omgang med hinanden.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal dette omfatte ”*matematik-historiske forløb*”. Dette kan både realiseres i forløb, der er integreret med arbejdet med kernestoffet, i selvstændige forløb eller i et samarbejde med andre fag.

I afsnit 3.4 vil mulighederne for et samarbejde med andre fag blive belyst gennem en række eksempler.

2.h Anvendelse af it

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer, herunder håndtering af mere komplekse formler og anvendelse af differentialkvotient og stamfunktion for mere komplicerede funktionsudtryk.*”.

I de foregående dele af vejledningens afsnit om faglige mål og fagligt indhold er dette behandlet i tilknytning til de enkelte faglige områder.

I næste afsnit om tilrettelæggelse vil anvendelse af it blive behandlet i tilknytning til selve undervisningen.

I afsnit 4.2 om prøveformer er der endelig en række kommentarer om anvendelse af it ved besvarelser af de skriftlige eksamensopgaver.

3. Tilrettelæggelse

Ifølge læreplanens afsnit 3.1 skal "*undervisningen tilrettelægges med henblik på, at den enkelte elev når de faglige mål. I centrum for undervisningen skal stå elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver*".
Videre hedder det: "*Undervisningen tilrettelægges med progression i arbejdsmetoder og fagligt indhold samtidigt med, at grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen.*"

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Som lærer må man være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning hver gang, man tager fat på et nyt emne. Dette gælder i særlig grad i starten af 1. g. Den måde, matematikken præsenteres på i lærebøger, er ikke nødvendigvis den samme som den måde, eleverne lærer faget på. Elevernes tilegnelse af fagligt stof vil i nogle sammenhænge starte med lærerens præsentation af bestemte metoder, men i andre sammenhænge starte med, at eleverne prøver sig frem. Forståelse for fagets deduktive opbygning forudsætter en abstraktionsevne, som langsomt må opbygges og trænes af eleverne, bl.a. gennem de eksperimentelle tilgange til faget. Eleverne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, således at de kan aktivere det i relevante situationer, og det sker bedst ved, at eleverne aktivt og selvstændigt arbejder med faget. Derfor kræver matematiklæring bl.a., at eleverne går i dialog med hinanden og med læreren for herigennem at udvikle deres begrebsbeherskelse.

Elevernes selvstændigarbejde med faget og progressionen med hensyn til arbejdsmetoder og fagligt indhold har indflydelse på undervisningens tilrettelæggelse. Det vedrører tilegnelsen af matematiske begreber gennem en vekselvirkning mellem eksperimentelt anlagte forløb og deduktive forløb. Det vedrører arbejdsformer som gruppearbejde, projektarbejde og arbejdet med emner. Det vedrører den enkelte elevs selvstændige arbejde med matematiske tekster og udformning af skriftlige besvarelser og rapporter. Uanset, hvor man er i undervisningen, skal det altid overvejes, hvorledes it-værktøjer kan udnyttes til at støtte for såvel færdighedsindlæring som den matematiske begrebsdannelse.

Det er ikke entydigt, at bestemte arbejdsformer matcher eksakte faglige niveauer, men arbejdsmetoder bør generelt understøtte elevernes udvikling gennem forløbet som led i udvikling af studiekompetencen.
Forskellige pædagogiske metoder kan derfor anvendes forskelligt afhængigt af niveau og forløb. Mundtlig fremlæggelse om små, meget afgrænsede matematiske emner kan være en god træning i begyndelsen af forløbet, mens større fremlæggelser vil kunne anvendes senere i forløbet, fx en fremlæggelse af regneregler for differentiable funktioner.
Til hver tid i et forløb elevers selvstændige arbejde være et nyttigt redskab til læring, men der kan være stor forskel på, hvordan et selvstændigt arbejde tilrettelægges. Hvor eleverne i selvstændigt arbejde i begyndelsen af et forløb bør have meget støtte både fagligt og med hensyn til arbejdsform, kan elevernes selvstændige arbejde senere i forløbet i højere grad være selvhjulpet.
Særligt ved meget selvstændigt gruppearbejde samt projekt- og emneforløb må man være indstillet på, at disse arbejdsformer kræver en del træning.
Måden at læse lektier bør også udvikles gennem forløbet.

I de tilfælde, hvor undervisningen på A-niveau foregår parallelt med undervisningen på B-niveau er det vigtigt, at lærerne aftaler en progression i de to forløb.

3.a Eksperimenterende tilgang

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: "*Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.*"

Forståelse af matematiske begreber har både et intuitivt og et formelt grundlag, og oftest er den intuitive forståelse en forudsætning for den formelle. Særligt den intuitive forståelse understøttes ved induktive undervisningsforløb. Den eksperimenterende tilgang og induktive metode i undervisningen skal stimulere eleverne til selv at prøve sig frem og forsøge forskellige løsningsmetoder over for et givet problem. At prøve sig frem kan give et bedre overblik og dermed give ideer til en løsningsstrategi ved arbejdet med et matematisk problem. Den eksperimenterende og induktive tilgang kan således også bidrage til at udvikle elevernes problemløsningsevne:

- I et lille forløb om hele tal og primtal kan man i fællesskab vise, at produktet af ulige tal er ulige, og dernæst lade eleverne selv formulere og bevise beslægtede små sætninger. I et lidt større forløb om Fibonaccital (se Eksempel 313) er der ligeledes gode muligheder for at eksperimentere og selv finde sammenhænge.
- I den indledende geometri kan eleverne selv argumentere for formler for vinkelsummer i en n-kant på basis af sætningen om vinkelsummen i en trekant, selv finde formler for arealer af parallelogrammer, trapezer mv., eller de kan selv i et dynamisk geometriprogram eksperimentere og formulere sætninger om trekanters karakteristiske linjer og de om- og indskrevne cirkler.
- Undersøgelse af karakteristiske egenskaber ved elementære funktioner eller simple kombinationer af disse kan lægges ud til eleveksperimenter med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- I differentialregningen kan man i fællesskab udlede differentialkvotienterne for eksempelvis x^2 og $\sqrt{x}$, og dernæst lade eleverne arbejde med at udnytte tretrinsreglen (se Eksempel 121) til at udlede differentialkvotienter af udtryk som $\left(f(x)\right)^2$ og $\sqrt{f(x)}$, hvor $f(x)$ er en differentiabel funktion.
- Et forløb om tangentbestemmelse (se Eksempel 124) kan tilrettelægges så eleverne eksperimenterer sig frem med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- I statistik vil mange forløb indeholde eksperimentelle elementer eksempelvis forløb med undersøgelse af et stort datamateriale på basis af stikprøver (se Eksempel 221).

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

CAS-værktøjer er meget velegnede til induktive forløb. I læreplanen står: "*CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.*" Med CAS-værktøjer har man helt nye muligheder, idet eksperimentel tilgang nu er forholdsvist ukompliceret, da værktøjet kan udføre besværlige udregninger og tegne komplicerede diagrammer næsten øjeblikkeligt. På denne måde kan undervisningen tilrettelægges, så eleverne gennem en række forsøg erfarer sammenhænge, dernæst formulerer hypoteser og formodninger for endelig i slutningen af forløbet at bevise disse regler. Dette er yderligere kommenteret i it-afsnittet.

3.b Deduktive forløb

"*Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar forståelse af den deduktive opbygning af matematisk teori*", står der i læreplanen. Det er vigtigt, at eleverne oplever matematik som et fag, hvor eksperimentelle tilgange er meget nyttige, men at matematik ikke er et eksperimentelt fag som de naturvidenskabelige fag. Videnskabsfaget matematik er et deduktivt opbygget fag, der bygger på aksiomer, begrebsdefinitioner og logik. Deduktive forløb kan både være ganske korte og have karakter af større emneforløb:

- Et forløb om den aksiomatiske opbygning af Euklids Elementerne (se Eksempel 111) kan tilrettelægges på mange måder. Man kan fx vælge at følge sporet fra starten til Euklids bevis for den Pythagoræiske læresætning eller til hans femkantskonstruktion. Man kan også gennemføre en første del fælles og tilrettelægge en anden del som projekter, hvor eleverne selv vælger et blandt flere.
- Den successive udvidelse af talmængderne kan give anledning til forskellige deduktive delforløb, fx om konstruktionen af de rationale tal eller om de reelle tals opbygning. Eller man kan tage udgangspunkt i en intuitiv opfattelse af de reelle tal og gennemføre et forløb om de komplekse tal.
- Udvidelsen af potensbegrebet og indførelsen af rodbegrebet kan gennemføres som et deduktivt forløb. Matematisk induktion er dog næppe velegnet til første del af gymnasieforløbet.
- Hovedsætningerne om differentiable funktioner kan behandles i et strengt deduktivt forløb, der tager udgangspunkt i de kontinuerte funktioners egenskaber.
- Antallet af rødder i et n'te grads polynomium kan studeres på grundlag af algoritmen for polynomiers division, eller man kan tilrettelægge et forløb på grundlag af Rolles sætning og med betragtninger over afledede funktioner.
- Konveksitet af grafer og betydningen af f'' kan behandles i et deduktivt forløb med udgangspunkt i differentialregningens hovedsætninger.
- Et forløb om funktioners størrelsesorden kan tilrettelægges strengt deduktivt.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

3.c Den mundtlige dimension

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: "*Den enkelte elevs forståelse af matematik skal udvikles gennem arbejde med mundtlig formidling.*"
I undervisningstilrettelæggelsen inddrages både overvejelser om variation i undervisningsmetoder og progression i forhold til selvstændighed, omfang og præcision i brugen af det matematiske sprog. Arbejdsformer som lærergennemgang og klassediskussioner, gruppearbejde, par-arbejde, store og små elevforedrag kan alle give gode rammer for arbejdet med mundtligheden. Invitation af en gæsteforelæser eller besøg på en videregående uddannelsesinstitution med foredrag af professionelle matematikere kan både give eleverne indtryk af nødvendigheden i at opøve evnen til at koncentrere sig om en mundtlig fremstilling og dialog i længere tid ad gangen og give dem et glimt af de spændende og udfordrende problemstillinger, faget arbejder med på dét niveau.

Kravene til præcision og forventningerne til fyldigheden af den enkelte elevs bidrag til en klassediskussion ændrer sig gennem hele gymnasieforløbet. Denne udvikling kan stimuleres ved at tilrettelægge forløb, hvor eleverne selv bruger det matematiske sprog i fremlæggelse og diskussion i par eller grupper.

3.d Gruppearbejde

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: *"En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.*"

Ved gruppearbejde arbejder eleverne selvstændigt med faget under lærerens vejledning. Gruppearbejde kan være kortere og forholdsvist stramt styrede forløb, hvor alle elever arbejder med samme forlæg. Det kan være opgaver/øvelser, gangen i et bevis i lærebogen eller spørgsmål til andre tekster med matematisk indhold. I gruppearbejdet vil undervisningen næsten af sig selv være tilpasset elevernes niveau, idet ikke alle grupper arbejder på lige højt fagligt niveau og ikke når lige langt. Som lærer kan man tilpasse sin vejledning af hver gruppe herefter. Det vil oftest være formålsløst at afslutte et gruppearbejde, hvor alle elever har arbejdet med samme emne, med en klassegennemgang eller en elevfremlæggelse af emnet, fordi udbyttet af denne form for afrunding på gruppearbejdet for det meste er meget ringe, og kan virke demotiverende på eleverne. En evaluering direkte i gruppegi (skriftligt eller mundtligt) vil ofte give et meget større udbytte for den enkelte.

I klassediskussionen er eleverne med til at sætte dagsordenen, og læreren går her i dialog med eleverne. Her er det vigtigt, at man som lærer ikke konstant retter forkerte elevudsagn, og selv siger det korrekte, men tværtimod hele tiden arbejder bevidst med elevernes anvendelse af sprogbrugen og diskuterer forkerte opfattelser af begreberne. Denne form kan være god til fx at diskutere løsning af en opgave, hvor de forskellige elevforslag diskuteres i klassen.

Den traditionelle lærergennemgang af matematisk stof (forelæsningen) har også sine fortrin, idet mange elever får stoffet gennemgået samtidigt: Men den har samtidig den ulempe, at alle elever skal følge med i samme tempo og på samme niveau. Derfor vil denne form egne sig bedst til tidsmæssigt kortere forløb. Eleverne ser og hører herved de matematiske begreber anvendt på korrekt måde og får herved indtryk af korrekt matematisk sprogbrug, hvor læreren optræder som "rollemodel".

3.e Arbejdet med matematiske tekster

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: "*Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse, bearbejdning og præsentation af forelagte matematiske tekster.*"
Udvikling af elevernes færdigheder i at læse en forelagt matematisk tekst selvstændigt har betydning for elevens studiefærdighed såvel på de videregående uddannelser som i gymnasiets matematikundervisning. At fokusere på evnen til at læse en matematisk tekst selvstændigt betyder, at selve det at læse en matematisk tekst får en større plads i undervisningen. Nødvendigheden af at kunne læse en matematisk tekst starter allerede ved løsningen af en lidt mere kompliceret opgave, noget som forudsætter, at man kan forstå den koncentrerede fremstilling og fx kan identificere variable og sammenhænge mellem dem. Det er ikke noget eleven kan i forvejen, og derfor skal det trænes, fx i opgaver som:

- I et koordinatsystem er der givet to punkter A og B, en lineær funktion f og en eksponentielt voksende funktion g, hvis grafer begge går gennem punkterne A og B. For enhver værdi af x er $P(x, f(x))$ et punkt på grafen for f og $Q(x, g(x))$ et punkt på grafen for g. Bestem den størst mulige værdi af $|PQ|$, når $x \in [1;4]$.
- For ø-gruppen Galapagos gælder, at antallet af arter af landplanter på den enkelte ø-gruppe med god tilnærmelse kan beregnes ud fra øens areal, målt i square miles, ved hjælp af en funktion $N(x)$. Om funktionen N oplyses, at $N(15) = 68$ og $N(174) = 149$, og at dens for-

skrift er af formen $N(x) = bx^a$. Bestem tallene *a* og *b*. Bestem forholdet mellem antal arter af landplanter på to forskellige øer, hvor den ene ø har et areal, der er 2,5 gange så stort som arealet af den anden ø.

– I vedproducerende skovbrug er langsigtet planlægning nødvendig, idet fx en bøg fældes, når den er 90-120 år. I en redegørelse fra 1983 skriver Skovstyrelsen til Miljøministeriet, at arealet af de private bøgeskove er aftaget siden 1930'erne. Styrelsen forventer, at dette areal i fremtiden vil blive reduceret med 0,9 % pr år, hvis udviklingen fra årene før 1983 fortsætter. I det følgende antages, at skovstyrelsens forudsigelse holder. Hvor mange procent vil arealet af private bøgeskove være reduceret med i år 2083 sammenlignet med arealet i 1983?

Men også det at læse en gennemgået matematisk tekst (se Eksempel 161) er noget, eleven skal lære. Det er ikke indlysende for alle elever, at man ved læsning af matematik må arbejde med papir og blyant, at man må stille spørgsmål til teksten, at man må tage notater, at man må udføre alle mellemregninger. At vejlede eleven i at læse en matematisk tekst kan gribes an på mange måder. Fx kan man give eleven en opskrift på, hvordan man læser en matematisk tekst, og man kan prøve at tydeliggøre, hvilke ligheder og forskelle der er mellem at læse en matematisk tekst og tekster i andre fag. Man kan udarbejde arbejdsspørgsmål til en tekst, som eleverne har for. Man kan bede eleverne aflevere deres studienotater fra hjemmearbejdet med en tekst. Man kan lade dem læse mindre matematiske tekster, som ikke er gennemgået, og som de skal gøre rede for.

At læse en forelagt matematisk tekst selvstændigt (se Eksempel 163) er i princippet ikke så forskelligt fra at læse en gennemgået matematisk tekst. Og at læse en tekst selvstændigt kan være et led i at lære at læse også gennemgåede tekster. Men selvstudium kræver et større fagligt overblik hos eleven end niveauet i teksten, og derfor må de valgte tekster i sværhedsgrad selvfølgelig ikke overstige elevens faglige niveau. De benyttede tekster kan være af mange forskellige slags: Opgaver, eksempler fra lærebogen, udvalgte sider fra lærebogen, oversigtsartikler, artikler fra populærvidenskabelige magasiner, tekster fra internettet, artikler fra aviser, annoncer osv.

3.f Projektforløb og emneforløb

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”*En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projekt- eller emneforløb over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger, der er genstand for fagsamarbejde. For hvert større forløb formuleres faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og eleverne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater eller konklusioner vedrørende en tværfaglig problemstilling.*”

Nogle projektforløb, emneforløb eller større sammenhængende opgaver vil være knyttet til matematiks samarbejde med andre fag. Både valg af emner, arbejdsform og tidsforbrug samt produkt og evalueringsform aftales her mellem de involverede lærere og med eleverne.

Et projektforløb er ikke en entydig størrelse, men kan defineres på flere måder, som hver for sig har fordele og ulemper i forhold til en given undervisningssituation. Den enkelte lærer må derfor i den givne situation, på det givne trin i undervisningen og ud fra stoffets karakter samt sit kendskab til det pågældende hold nøje overveje, hvilken form der er mest hensigtsmæssig. Men fælles for alle projektforløb er, at det starter med en problemformulering, at eleverne arbejder selvstændigt undervejs, og at det slutter med et produkt.

En problemformulering er oftest formuleret som en afgrænset faglig problemstilling, der behandles og besvares gennem projektarbejdet. Problemformuleringen kan udarbejdes af eleverne selv, enkeltvis eller i grupper. Men dette kan være en tidskrævende proces, og valg af denne form er normalt forbundet med, at det er et bevidst mål for undervisningsforløbet, at eleverne skal lære at formulere egne spørgsmål til et forelagt materiale som eksempelvis i visse statistiske forløb.

I de fleste tilfælde vil det være en fordel, at læreren på forhånd har udarbejdet problemformuleringen/-erne. Enten kan alle grupper arbejde med samme problemformulering, eller læreren kan udarbejde flere forskellige, som eleverne så gruppevis vælger mellem.

Et selvstændigt elevarbejde med projektet kræver god forberedelse og faste aftaler. Eksempelvis aftaler om arbejdsformen i grupperne, om hvilke opgaver eller roller det enkelte gruppemedlem har, om dette går på skift, om hvordan man giver lektier for, og hvordan dette registreres, om råd og vink fra lærere, og om hvornår læreren tilkaldes for at yde direkte hjælp. Under projektarbejdet kan der opstå ønske om at ændre problemformuleringen. Det kan være en god ide, at lærere og elever på forhånd aftaler regler for, hvornår og hvordan en problemformulering kan ændres.

Alle projekter afsluttes med et produkt, der kan evalueres. Produktet kan være en rapport, et foredrag med tilhørende disposition, en synopsis, et debatindlæg til en avis eller andet. Læreren klargør fra starten kravene til produktet og aftaler på forhånd med eleverne, hvorledes projektet evalueres.

Emneforløb adskiller sig fra projektarbejde ved, at der ikke nødvendigvis foreligger en problemformulering, at eleverne ikke nødvendigvis arbejder selvstændigt i grupper i hele forløbet, og at der ikke nødvendigvis er et produktkrav. Undervisningen i et emneforløb kan veksle mellem klasseundervisning, forelæsning, elevforedrag, kortere eller længerevarende gruppearbejder, elevfremlæggelse af delresultater o.a. Forud for et emneforløb formuleres faglige delmål for forløbet, arbejdsformen aftales med eleverne, og det fastlægges, hvordan forløbet skal evalueres; herunder evalueres det, hvordan emneforløbet har været med til at bringe eleverne videre på vej til at opfylde undervisningens mål. Faglige delmål evalueres normalt med en test.

Er der tale om et større emneforløb, der tager sigte på at dække et område af de faglige mål, afrundes forløbet med et skriftligt produkt. Dette kan være en rapport, et passende bredt udvalg af opgavetyper fra det behandlede emne, en kommenteret oversigt eller mindmap over strukturen i den behandlede matematik, et foredrag med tilhørende diskussion eller andet.

3.g Rapporter og skriftligt arbejde

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”*I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner*.”

Den skriftlige dimension er et centralt element i matematik, da det både er et indlæringsredskab og et evalueringsinstrument. Det er en del af undervisningen, at eleverne vejledes med hensyn til de krav til skriftlige besvarelser, som fremgår af læreplanens bedømmelseskriterier og vejledningens afsnit 4 om bedømmelse af de skriftlige opgaver.

Arbejdet med de traditionelle matematikopgaver har til formål at opøve eleverne i problemløsning, fra det simple til det mere komplicerede. Her kan arbejdet varieres. Ofte lærer man et fag godt at kende, hvis man er god til at stille spørgsmål inden for faget. Man kunne benytte denne ide ved træningsopgaver, idet man beder eleverne om at udarbejde nogle opgavetyper, som de selvfølgelig skal kunne løse selv. Andre elever i klassen kunne så evt. løse dem. Man kan endvidere lade eleverne arbejde med at rette opgaver med bestemte fejl, som læreren har udarbejdet.

Elevernes udbytte af rettelserne vil normalt stige betydeligt, hvis slutretningen ikke står alene, men er kombineret med rettelser og kommentarer givet i løbet af skriveprocessen. En elektronisk besvarelse kan give gode muligheder for videre bearbejdning og redigering og derfor være velegnet til at kvalificere elevernes skriftlige arbejde. Man kan fx lade dele af et opgavesæt være elektronisk med genaflevering for øje eller man kan opdele arbejde med et opgavesæt i forskellige faser, hvor enkeltfaser er elektroniske og genstand for kritik fra lærer eller fra andre elever.

Eleverne skal også arbejde med større matematikopgaver. Det kan ske i forbindelse med projekt og emneforløb, hvor eleverne udarbejder en rapport. Her kan et af målene være at opøve elevernes evne til skriftlig formidling. I andre forløb kan man arbejde med formidlingsopgaver (se Eksempel 302), hvor eleverne skriver til en bestemt målgruppe. Det kunne fx være en artikel om kuponhæfternes tilbud om afbetalingshandel, fx computerkøb, og denne artikel kunne være til et ugeblad. Endelig kan elevernes notater også behandles som skriftligt arbejde. Eleverne kan forbedre deres notatteknik, hvis de udarbejder oversigter over de forskellige definitioner og sætningers indbyrdes relationer i fx et mindmap.

3.h. It

I læreplanen står der i afsnit 3.3 om it: ”*Undervisningen tilrettelægges, således at lommeregnere, it og matematikprogrammer bliver væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning*”.

Ved it i matematikundervisningen forstås håndholdt teknologi (CAS-værktøj, geometriværktøj, lommeregnere) samt computerbaserede programmer (CAS-værktøj, geometriværktøj, statistikprogrammer, regneark, Internet og webapplets etc.). Det er et krav, at alle elever skal have adgang til et CAS-værktøj. Imidlertid kan andre mere områdespecifikke værktøjer være særdeles velegnede til at støtte elevernes arbejde med både kernestofemner og emner i det supplerende stof.
Fælles for både CAS-værktøjet og andre it-værktøjer er, at de muliggør en mere eksperimenterende tilgang til begreber, emner og problemløsning i matematik.

Man kan betragte brugen af it i undervisningen ud fra to synsvinkler. Nemlig egentlig *it-baserede* forløb, som er tilrettelagt således, at it-værktøjer er en nødvendig forudsætning for, at eleverne kan arbejde med det valgte emne, fx behandling af større datasæt, og *it-støttede* forløb, hvor it ikke er strengt nødvendigt, men hvor it kan støtte den daglige undervisning.

I læreplanens afsnit 3.2 om didaktiske principper står der specielt om CAS-værktøjet, at: ”*CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse*”. Dvs. CAS-værktøjet skal have en fremtrædende plads i undervisningen generelt og i elevernes arbejde med både teori og problemløsning.
I brugen af CAS-værktøjet kan man med fokus på den givne problemstilling diskutere kvalificeret metodevalg ved at give eleverne indsigt i værktøjets mange muligheder. Man kan også diskutere de forskellige metoders styrker og svagheder i forskellige typer af problemløsning, således at de kan skifte mellem disse, og når en metode kommer til kort, så kan en anden måske løse problemet. Ele-

verne bør fx i grafisk ligningsløsning opnå kendskab til disse grafiske billeders begrænsninger, og de bør have indsigt i, at kendskab til de elementære funktionernes egenskaber er afgørende for at kunne forklare det grafiske forløb uden for 'billedet'.

I læreplanens afsnit 4.2 om prøveformer hedder det: "*Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3*". Dette kræver, at CAS-værktøjet indgår som et naturligt hjælpemiddel i elevernes daglige arbejde med de skriftlige opgaver i matematik, således at de opøver rutiner i brugen af værktøjet, så de bliver i stand til på en hensigtsmæssig måde at anvende værktøjet ved løsning af de centralt stillede eksamensopgaver.

3.i Undervisningstilrettelæggelse med it

It bør ligesom i andre fag være en naturlig del af den daglige undervisning i matematik på lige fod med andre undervisningsmaterialer. I læreplanens afsnit 3.3 hedder det, at der: "*I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning, til symbolsk differentiation og integration samt til løsning af differentialligninger. Endvidere indgår anvendelse af lommeregnere, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning*".

It skal anvendes, fordi it kan være med til at kvalificere undervisningen og støtte eleverne i, at:

- Forstå matematiske ræsonnementer og beviser og i at danne matematiske begreber, fordi it gør det muligt at fokusere på det væsentlige. Ved udledning af differentialkvotienter kan der sættes fokus på tretrinsreglen, når værktøjet kan udføre reduktioner. Animationer af sekanternes vandring mod tangenten kan støtte begrebstilegnelsen. Ved udledning af cosinusrelationerne kan der sættes fokus på, hvorledes udledningen bygger på viden om retvinklede trekanter samt opstillingen af de to ligninger, og man kan undgå at indsigten heri hæmmes af vanskelige reduktioner.
- Udvikle matematiske færdigheder, fx i forbindelse med faktorisering, reduktion og ligningsløsning, idet værktøjet kan give umiddelbar respons på resultater og omskrivninger. Man kan samtidig med større frihed træne i at indføre variable og opstille ligninger, da værktøjet kan håndtere flere ligninger med flere ubekendte.
- Benytte en eksperimentel tilgang til begreber og problemer, herunder at opstille hypoteser og afprøve disse. Dette gælder også (som tidligere nævnt under eksperimentelle forløb) i mange mindre delundersøgelser, som fx undersøgelse af, hvilken betydning koefficienterne i et 2. gradspolynomium eller konstanterne i de elementære funktioners regneforskrifter har for grafernes udseende. Tilsvarende kan gennemføres en eksperimenterende undersøgelse af, hvilken betydning de enkelte parametre som rente, afdragstid mv. har for en bestemt økonomisk problemstilling.
- Opstille og udforske matematiske modeller, både gennem beregninger og grafiske fremstillinger af et datamateriale. Det kan være et modelleringsarbejde i samarbejde med andre fag, som omtalt andetsteds. Eller det kan være optimeringsproblemer, hvor CAS-værktøjets muligheder for at stille "hvad-nu-hvis"-spørgsmål udnyttes, som i følgende undersøgelse af, hvor meget en bil "fylder" på en vej: Bilen er 4 meter lang, kører med en fart på v m/s, førerens reaktionstid er 1,0 s og bremselængden er $0{,}07 \cdot v^2$, dvs. målt i meter "fylder" bilen -

hvis man holder den korrekte afstand - stykket: $4+1\cdot v+0{,}07\cdot v^2$. Altså kan der på vejen passere: $f(v)=\dfrac{v}{4+1\cdot v+0{,}07\cdot v^2}$ biler pr. sekund. Med CAS-værktøjet findes let den hastighed *v*, der giver det maksimale antal biler pr. sekund på vejen. Derefter kan man stille spørgsmål af typen: Hvad nu hvis? Dvs. nu kan man eksperimentere. Man kan prøve med en søvnig bilist ved at rette 1 sekund til 2 sekunder. Man kan variere på vejens friktion. En mere glat vej svarer et tal, der mindre end 0,07. Derved finder man hurtigt ud af, hvad vejens kapacitet afhænger af.

– Udforske sandsynlighedsteoretiske modeller og statistiske test som beskrevet i afsnit 2.b: **Statistik og sandsynlighedsregning**.
– Kvalificere deres skriftlige arbejde ved at inddrage mulighederne for elektronisk kommunikation om skriftlige opgaver og for at give eleverne feedback undervejs i arbejdet med et skriftligt produkt. En egentlig procesretning kan også udnytte it-faciliteternes muligheder.
– Kommunikere om matematik. Ved inddragelse af it-værktøjer i undersøgelsen af forskellige problemer kan man stimulere elevernes behov for at diskutere resultater, hvad det er de ser osv., samtidig med at it kan anvendes af elevernes i deres præsentation af deres besvarelser af givne problemstillinger.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

3.j Samspil med andre fag

I læreplanens afsnit 1.1 hedder det: ”*Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen*”. I læreplanens afsnit 3.4 om samarbejde med andre fag siges videre: ”*Når matematik indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges et fagligt samarbejde, som indeholder mere omfattende anvendelse af matematik. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen*”.

Andre fag som fysik, kemi, biologi, naturgeografi og samfundsfag anvender matematik til problemløsning og formulerer ofte hypoteser og teorier i matematikkens sprog. Matematik selv ”*har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori*”, hedder det i læreplanens afsnit 1.1. Problemstillinger fra andre fag udfordrer og stimulerer matematik til at finde metoder til at løse problemerne. Samtidig er sådanne problemer med til at vise betydningen af at beherske den abstrakte matematiske teori, og alle de forskellige eksempler er med til at gøre undervisningen mere levende og vedkommende for eleverne.

Et samarbejde med andre fag kan således bidrage til, at eleverne kan ”*demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling*”, som det hedder i læreplanens afsnit 2.1.

I læreplanens afsnit 1.1 hedder det: ”*Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form*”. I læreplanens afsnit 3.4 om samarbejde med andre fag siges videre: ”*Der skal tilrettelægges undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og tekno-*

logi. Dette skal ske gennem et samarbejde med andre fagområder eller ved at inddrage elevernes kendskab til disse fagområder".

Det grundlag for matematisk teori og ræsonnement, som blev udformet i oldtidens Grækenland, har øvet betydelig indflydelse på den vestlige verdens tænkning og har påvirket talrige store filosoffer og kirkefædre, samfundsteoretikere og politiske tænkere. Samtidig har matematikkens evne til at løse praktiske problemer givet afgørende bidrag til samfundsudviklingen, ligesom nye behov bestandig har stillet nye opgaver til matematikken.

I almen studieforberedelse kan matematik deltage i en bred vifte af emneforløb og omvendt vil et sådant fagligt samarbejde kunne bidrage til, at eleverne kan "*demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling*", som det hedder i læreplanens afsnit 2.1.

I grundforløbet kan der eksempelvis

- i et samarbejde med naturvidenskabeligt grundforløb, med naturvidenskabelige fag eller med idræt gennemføres kortere eller længere forløb over vækstmodeller (se Eksempel 201)
- i et samarbejde fysik gennemføres et forløb over afkøling og eksponentielle modeller (se Eksempel 205)
- i et samarbejde med samfundsfag C gennemføres et forløb med anvendelse af statistiske metoder eksempelvis til undersøgelse af kriminalitet
- i et samarbejde med biologi gennemføres et forløb om nedbrydning af rusmidler.

I vejledningen til matematik C-niveau og fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og samfundsfag kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- opinionsmålinger (se Eksempel 220), statistiske metoder og indsamling af data via spørgeskemaer eller på anden vis
- stikprøver ud fra store databaser (se Eksempel 221), overvejelser om kvaliteten af sådanne stikprøver, opstilling af hypoteser og statistisk afprøvning af sådanne
- makroøkonomiske modeller og vismandsspillet
- velfærdsmodeller (se Eksempel 224)
- LP-modeller
- profitmaksimering i enkeltvirksomheder

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og biologi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- arvelighed (se Eksempel 210), betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov
- retsgenetik og analyse af dna-sekvenser (se Eksempel 211), hvor matematik anvender Bayes sætning, og avancerede it-værktøjer anvendes i analysen af dna
- epidemier og immunbiologi
- vækstmodeller (se Eksempel 201)
- dig og din puls, hvor idræt naturligt kunne inddrages
- fedme og kolesterol
- diabetes 2-modellen (se Eksempel 214)
- at smage eller føle forskel (se Eksempel 283).

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og fysik kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- kinematik, eksempelvis med projekter fra det naturvidenskabelige gennembrud i 16-1700-tallet om kast, fald og centralbevægelser
- kasteparabler (se Eksempel 236)
- svingninger
- varmeledning
- afkøling (se Eksempel 205).

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og kemi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- pH
- algebraisk afstemning af reaktionsskemaer og løsning af lineære ligningssystemer.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og musik kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- toneskalaer fra den pythagoræiske over middelalderskalaer til den veltempererede
- lydbølger.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og naturgeografi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- landmåling, opmåling af Jorden og korttegning gennem tiderne
- Jordens alder.

På fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

I almen studieforberedelse kan matematik eksempelvis medvirke i et forløb om:

- argumentets rolle i den vestlige kultur og arven fra Euklid
- forestillinger om rummet (se Eksempel 270) med udgangspunkt i Abbot Abbots 'Flatland', Lewis Carrols bøger, filosoffer som Kant og matematikere som Gauss
- billedanalyse (se Eksempel 307) og det gyldne snit
- Newton og hans tid
- risikovurderinger i det moderne samfund – Three Mile Island og Challenger.
- formidling af statistiske undersøgelser (se Eksempel 302), med udgangspunkt i konkrete eksempler.
- opdagelsesrejser og navigation
- tunnellen på Samos
- det moderne verdensbillede
- centralperspektiv og værdiperspektiv (se Eksempel 305)
- sundhed og livsstil

I vejledningen til almen studieforberedelse og fagets side på emu'en er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

4. Evaluering

4.a Løbende evaluering

I afsnit 4.1 af læreplanen hedder det: "*Både undervisningen og elevernes faglige udbytte heraf evalueres løbende.*" Sigtet med den løbende evaluering er altså dobbelt. Dels skal den vejlede den enkelte elev i det videre arbejde med faget, dels skal den afdække om undervisningens tilrettelæggelse er optimal med hensyn til elevernes udbytte.

Den løbende evaluering af det mundtlige arbejde indeholder en vurdering af elevernes bidrag til undervisningen i klassediskussionerne samt en vurdering af deres selvstændige fremlæggelse. Mundtlig evaluering kan også foregå ved samtaler med eleverne, når de sidder gruppevis og arbejder selvstændigt. Her kan man få et godt indtryk af deres faglige niveau og deres formidlingsevne.

Den løbende evaluering af det skriftlige arbejde vedrører både eksamenslignende prøver og små test, skriftlige opgaver og større rapporter. I læreplanens afsnit 4.1 hedder det: "*Gennem hele gymnasieforløbet arbejdes med løsning af skriftlige opgaver, og eleverne afleverer jævnligt skriftlige besvarelser. Besvarelserne rettes og kommenteres på grundlag af bedømmelseskriterierne i afsnit 4.3.*" Det løbende arbejde med at rette og kommentere de skriftlige opgaver er kommenteret i hovedafsnit 3 under overskriften **Rapporter og skriftligt arbejde**, hvortil der henvises.

I læreplanens afsnit 4.1 hedder det videre: "*For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes elevernes udbytte af forløbet evalueres.*
Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål."

Målene opstilles på baggrund af gymnasiets samlede målsætning og den faglige målbeskrivelse i læreplanens afsnit 2.1. I nogle forløb vil dette naturligt ske i et samarbejde med klassens øvrige lærere. Det er nødvendigt at indtænke faglig progression i de opstillede mål, idet læreplanens målbeskrivelser er slutmål, som skal være opnået ved undervisningens afslutning. Endelig indtænkes hvilke dele af kernestoffet og det supplerende stof, der indgår i forløbet.

Ethvert større undervisningsforløb afsluttes med en test af elevernes udbytte. En test er ikke nødvendigvis identisk med en traditionel skriftlig prøve. Det kan også være et spørgeskema med korte faglige spørgsmål og andre spørgsmål om elevernes arbejde i forløbet. En sådan test kan sammenknyttes med evaluering af selve undervisningsforløbet. Testen kan også være mundtlig, hvis der er tale om et projektforløb, hvor hver projektgruppe fremlægger resultatet af deres arbejde.

I læreplanen hedder det endelig: "*Efter hvert større projekt- eller emneforløb gennemfører lærer og elever en evaluering af undervisning, arbejdsformer og fremskridt på vej mod opfyldelsen af de faglige mål.*" Selve undervisningen skal således også være genstand for evaluering, så man som lærer hele tiden overvejer, om man nu kunne tilrettelægge undervisningen med større udbytte for eleverne. Evaluering af undervisningen vil indgå i skolens evalueringsplan. Det er helt naturligt at inddrage eleverne i denne evaluering. Det kan ske på mange måder:

- Ved en åben debat i klassen ud fra en dagsorden med særlige temaer.
- Ved et anonymt spørgeskema, der efterbehandles af læreren og evt. diskuteres i klassen.
- Ved samtale med eleverne gruppevis, mens de fx har gruppearbejde.
- Individuelle udviklingssamtaler med hver elev. Her kan flere fag inddrages og samtalerne kan foruden de enkelte fag også omfatte mere generelle emner såsom studieteknik mv.

4.b Den skriftlige prøve
I læreplanens afsnit 4.2 hedder det: ”*Til den skriftlige prøve gives der 4 timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål, beskrevet i afsnit 2.1. Den første del af sættet skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3.*”

4.c Formulering af opgaverne
Ved beregninger af enhver art arbejdes der inden for mængden af reelle tal eller delmængder heraf. Komplekse tal vil derfor aldrig høre med til en ønsket løsningsmængde.

I en opgavetekst vil det ofte forekomme, at grundmængden for en ligning ikke direkte er nævnt. Det er da altid underforstået, at grundmængden skal vælges så omfattende som muligt inden for de reelle tal.

Ligeledes vil det ofte forekomme, at definitionsmængden for en given reel funktion ikke udtrykkeligt er angivet i opgaveteksten. I sådanne tilfælde er det altid underforstået, at definitionsmængden er den mest omfattende delmængde af de reelle tal, inden for hvilken den angivne forskrift har mening. En modelsituation kan lægge begrænsninger på variationen af de variable ud over de rent matematiske begrænsninger. Er dette ikke eksplicit angivet i opgaveformuleringen, er det en del af besvarelsen at redegøre for, hvilke intervaller der arbejdes indenfor.

Brug af ord som ’skitse’ og ’tegn’ er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlig for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse og modeller af trekanter tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven.

Brug af formuleringer som ’løs ligningen’, ’bestem nulpunkter’ eller ’beregn skæringspunkter mellem to grafer’ er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske contra numeriske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte eleverne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode, samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl. I opgaver, hvor der ønskes en begrundelse for antallet af løsninger, eller for at den samlede løsningsmængde er bestemt, vil dette fremgå af opgaveteksten.

I opgaver, hvor der skal argumenteres for at den samlede løsningsmængde er bestemt, eller hvor der skal bestemmes lokale ekstrema, vil der ofte være forskellige veje til målet, og der foreskrives ikke nogen bestemt metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i dette, herunder hvorledes man kan argumentere ved hjælp af $f'(x)$.

I opgaver inden for integralregning vil det altid fremgå af opgaveteksten, hvis man ønsker angivelse af en stamfunktion eller et ubestemt integral. Når ubestemte integraler bestemmes ved hjælp af et CAS-værktøj forventes det ikke, at eleverne kan omskrive et svar, hvori der indgår funktioner, som ikke er en del af kernestoffet.

I delprøven med hjælpemidler kan der i modelsituationer optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj, jfr. vejledningens afsnit 2d.

I en modelopgave kan eksaminanderne få et datamateriale for sammenhængen mellem variable samt oplysninger om, hvilken matematisk modeltype der kan beskrive materialet. Eksaminanderne skal kunne opstille og håndtere denne model, herunder stille spørgsmål til og besvare spørgsmål vedrørende modellen, men de forventes ikke ved den skriftlige eksamen at kunne begrunde én bestemt model frem for andre. Det forventes, at eksaminanderne kan udføre lineær, eksponentiel og potensregression.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde, hvor der ikke foreligger entydige internationale regler, blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. I prøven uden hjælpemidler vil funktionsudtryk som $\sqrt[a]{x^b}$ altid være omskrevet på formen x^{a}.

Ligesom e^{kx}, a^x, $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$ både kan betegne funktionen og en funktionsværdi, således kan det også generelt forekomme, at symbolet $f(x)$ anvendes til både at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Konteksten vil afgøre, om det er hensigtsmæssigt eller ej at anvende parenteser i udtryk som $\ln(x)$ og $\ln x$ osv. Kan det misforstås, vil man altid sætte parenteser, som i $\ln(a \cdot b)$.

Der anvendes som standard dansk komma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser: Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

Punkter i et koordinatsystem kan både blive angivet på formen $P(2,3)$, $P = (2,3)$ og alene med koordinatsættet (2,3). Den samme notation vil blive anvendt ved beskrivelse af punkter på en graf.

4.d Eksamenssættets udformning

Delprøven med hjælpemidler kan indeholde valgfrie opgaver. Er dette tilfældet vil det tydeligt fremgå af sættet, hvor mange af de valgfrie opgaver der må afleveres til bedømmelse.

Til eksaminandernes orientering vil det i eksamenssættet være anført, hvilken pointfordeling der lægges til grund for vurderingen af besvarelsen. En fuldstændig besvarelse giver 100 point, hvoraf de 25 henhører til prøven uden hjælpemidler. Et antal point, maksimalt 10 % af det samlede pointtal reserveres til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen.

Ifølge læreplanen består eksamenssættet ”*af opgaver stillet inden for kernestoffet og som skal evaluere de tilsvarende faglige mål beskrevet i afsnit 2.1*”. I hovedafsnit 2 i denne undervisningsvejledning er der i hovedtræk redegjort nærmere for, hvad dette betyder for opgaverne til prøven med hjælpemidler.

4.e Prøven uden hjælpemidler

Det forventes, at eleverne kan

- opstille enkle formler ud fra en sproglig beskrivelse
- anvende nulreglen og løse simple første og 2. gradsligninger
- anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk, der ikke er meget komplicerede
- sætte tal ind i forskrifter
- anvende Pythagoras læresætning
- foretage beregninger i ensvinklede trekanter
- håndtere eksponentiel notation og anvende potensreglerne
- isolere ukendte størrelser
- redegøre for andengradspolynomiers grafer
- bestemme regneforskrifter for lineære, eksponentielle og potensfunktioner
- differentiere polynomier, potensfunktioner, e^{kx} og $\ln(x)$
- anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- bestemme en tangentligning
- anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- aflæse væksthastighed grafisk
- bestemme stamfunktioner til polynomier, potensfunktioner, e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
- anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal.

4.f Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

For det skriftlige eksamenssæt gælder, at der i bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.

4.g Den mundtlige prøve
For hvert hold på skolen træffes et valg mellem to prøveformer:

"*Prøveform a): En mundtlig prøve på grundlag af et overordnet spørgsmål med konkrete delspørgsmål. Spørgsmålene til prøven er offentliggjort i god tid inden prøven og er udformet således, at de tilsammen gør det muligt at evaluere de faglige mål, der er beskrevet i afsnit 2.1. Spørgsmålene og en fortegnelse over undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.*"
Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte undervisningsforløb er nogle kortere forløb eller delforløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet havde. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 120 stk. 2 i stx bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).
Den enkelte lærer finder sin egen måde "at holde regnskab med", hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der måske kan udnyttes i den planlægning (se Eksempel 401). Listen over de undervisningsforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle elever.
Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i gennemførte undervisningsforløb. Det enkelte eksamensspørgsmål skal gøre det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og være udformet således, at eksaminationen kan bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.
Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen. Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre eleverne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.
Hvis holdet skal til mundtlig prøve placeres udkast til eksamensspørgsmål efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af undervisningsforløbene. Spørgsmål og en fortegnelse over undervisningsforløbene sendes til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene.

"*Prøveform b): En mundtlig prøve på grundlag af rapporter udarbejdet i tilknytning til undervisningen. Den enkelte eksaminands rapporter skal som helhed dække de faglige mål, der er beskrevet* *i afsnit 2.1. Eksamensspørgsmålene udformes med en overskrift og konkrete delspørgsmål i relation til rapporterne. Spørgsmålene og en fortegnelse over rapporter og undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.*"

Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb, herunder projektforløbene. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte projektforløb og emneforløb er nogle kortere forløb eller delforløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet havde. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 120 stk. 2 i stx bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).

Den enkelte lærer finder sin egen måde "at holde regnskab med", hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der måske kan udnyttes i den planlægning (se Eksempel 401). Listen over de projektforløb og emneforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle elever. Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i projektforløb og emneforløb. For hvert projekt foreligger en projektformulering, der rummer en sådan faglig bredde og dybde, at en eksamination med udgangspunkt heri gør det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og at bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.

Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen. Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre eleverne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.

Hvis holdet skal til mundtlig prøve placeres udkast til eksamensspørgsmål efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af projektformuleringerne. Bestemte eksamensspørgsmål kan have én fælles overskrift, men forskelligt udformede undertekster, der hver peger i retning af de forskellige projektformuleringer, eleverne har arbejdet med. Samtidig sendes spørgsmål og en fortegnelse over projektforløbene til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene / prøvegrundlaget.

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det videre: "*Eksaminationstiden er 30 minutter pr eksaminand. Der gives 30 minutters forberedelsestid.*
Prøven er todelt.
Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, henholdsvis præsentation af den udtrukne rapport og dennes faglige delmål, suppleret med uddybende spørgsmål fra eksaminator.

Anden del former sig som en samtale mellem eksaminand og eksaminator med udgangspunkt i det overordnede spørgsmål, henholdsvis rapportens genstandsfelt."
Endelig hedder det i læreplanen vedrørende prøveform (b), at der "*alene tages hensyn til den mundtlige præstation*".

Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Der må gerne være dubletter. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.

Uanset prøveform skal det enkelte eksamensspørgsmål være så præcist formuleret, at der ikke kan være tvivl om, hvilket stofområde der vil blive eksamineret i. Udtryk som "du kan evt. komme ind på...", eller "hvis der bliver tid ..." skal undgås.
Eksamensspørgsmålene må hverken indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen.

Uanset prøveform opbygges eksamensspørgsmålet todelt med en forholdsvis kort overskrift og en uddybende undertekst med et eller flere konkrete delspørgsmål. De(t) konkrete spørgsmål er det stof, eksaminanden selv skal komme med et oplæg om. Samtaledelen bevæger sig inden for de rammer som overskriften udstikker.

Der er ingen fast regel for, hvor længe hver af de to faser i eksaminationen skal vare, men normalt bør der afsættes godt halvdelen af eksamenstiden til første del.

Såfremt en eksaminand har udarbejdet en rapport i papir eller elektronisk format om eksamensspørgsmålets genstandsfelt, er det naturligt, at eksaminanden inddrager rapporten i sin besvarelse af eksamensspørgsmålet. Er der anvendt bestemte geometriske, statistiske eller andre værktøjsprogrammer kan dette også indgå ved eksaminationen. Dog er det afgørende, at det er de matematiske færdigheder og ikke en teknisk formåen, der kommer til at stå i centrum for eksaminationen.

Eksaminator leder eksaminationen, men det er vigtigt, at eksaminanden får mulighed for en selvstændig fremlæggelse og ikke for hurtigt afbrydes. Det er ligeledes vigtigt, at forskellen mellem første og anden del af eksamen træder klart frem, således at første del ikke for hurtigt bliver til en samtaledel.

Samtalen kan tage udgangspunkt i nogle elementer fra første del og give eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelser af noget teori, at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over det faglige område. I samtaledelen kan man ikke afkræve eksaminanden bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem. Fejl og faglige misforståelser kan give anledning til opklarende spørgsmål, men dette må ikke udvikle sig til undervisning.

Eksaminanderne må have alle hjælpemidler, lærebøger, notater, rapporter, dispositioner til spørgsmålene mv. med både til forberedelsen og i selve eksamenslokalet. Eksaminanderne skal ikke bruge forberedelsestiden på at skrive en eventuel disposition de har lavet hjemmefra over på et andet stykke papir, men på at forberede sig på det spørgsmål, de har trukket.

Under selve eksaminationen må eksaminanden støtte sig til notater eller henvise til en rapport, men skal før prøvens afholdelse være gjort opmærksom på, at oplæsning eller afskrift af sådanne notater ikke tæller positivt med i bedømmelsen.

4.h Bedømmelseskriterier og karaktergivning

I læreplanens afsnit 4.3 er opridset de bedømmelseskriterier, der lægges til grund for bedømmelsen af såvel skriftlige som mundtlige præstationer. Det vil altid afhænge af det faglige stof, eller det konkrete eksamensspørgsmål, hvilke af de omtalte kriterier der naturligt er i spil i den givne situation:

”*Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de faglige mål, som er angivet i 2.1.*

I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder

- *kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber*
- *har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt*
- *er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt*

2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder

- *kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer*
- *kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde*
- *kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde*

3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder

- *kan perspektivere matematikkens udvikling*
- *har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag*
- *kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling*
- *demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.*”

I læreplanen hedder det endelig: ”*I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse*”.

En præstation, der fuldt ud opfylder de relevante faglige mål, vurderes til ”fremragende”, jf. bekendtgørelse nr 448 af 18/05/2006 (Bekendtgørelse om karakterskala og anden bedømmelse).

Nedenfor er i skematisk form vist, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på B-niveau:

Stx B Skriftligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan redegøre for og anvende modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om anvendelse af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende it-værktøjer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

Stx B Mundtligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teori	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et simpelt matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag..

5. Paradigmatiske eksempler

1. **Eksempel 111: Euklids elementer med elevvalgte projekter**
2. **Eksempel 121: Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter**
3. **Eksempel 123: Eksperimenterende forløb om variabelbegrebet: Tilfældige rektangler**
4. **Eksempel 124: Eksperimenterende forløb: Hvordan finder man tangenten?**
5. **Eksempel 161: Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst**
6. **Eksempel 163: Eksempel på matematisk tekst: Broerne i Königsberg**
7. **Eksempel 201: Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge**
8. **Eksempel 205: Tak for kaffe - Et forløb om lineær og eksponentiel regression**
9. **Eksempel 210: Arvelighed, betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov**
10. **Eksempel 211: Sandsynlighedsregning og retsgenetik**
11. **Eksempel 214: Diabetes type 2 – problemer med diagnose og behandling**
12. **Eksempel 220: Statistik og vælgeradfærd**
13. **Eksempel 221: Stikprøver og databaser et forløb indenfor emnet statistik**
14. **Eksempel 224: Velfærdssamfundet og befolkningsudvikling i Danmark**
15. **Eksempel 236: Kasteparablen i idrætten**
16. **Eksempel 270: Rum og dimension – om Abbott Abbotts Flatland**
17. **Eksempel 280: Sammenligning af to måleserier**
18. **Eksempel 282: Random Walk**
19. **Eksempel 283: Kan man smage forskel?**
20. **Eksempel 293: Vækstmodeller og differentialregning**
21. **Eksempel 294: Matematiske modeller og SD-diagrammer**
22. **Eksempel 302: Statistik, formidling og medier**
23. **Eksempel 305: Centralperspektiv og værdiperspektiv**
24. **Eksempel 307: Billedanalyse**
25. **Eksempel 313: Det gyldne snit og Fibonaccitallene**
26. **Eksempel 401: Liste over gennemførte forløb. B-niveau. Skabelon**

Eksempel 111:
Euklids elementer med elevvalgte projekter

Niveau: 1g/2g: B eller A
Tidsforbrug: I alt 8 moduler á 90 minutter
I. Indledning: 2 moduler

a) Fælles basisviden: Klip fra Euklids elementer: Definitioner, aksiomer (forudsætninger), slutningsregler (almindelige begreber), sætningerne 1, 2, 3, 4(uden bevis), 5.
b) Gruppedannelse: Efter valg af projektopgave

II. Arbejdet med Projektopgaver: 4 moduler
III. Produkt: Rapport og foredrag.
Krav til rapporten:
1 Hvert gruppemedlem skal bidrage med en underskrevet del. Alle i gruppen skal være inde i det stof gruppen som helhed har arbejdet med.
2 Der skal være en præcis litteraturliste over anvendt materiale, herunder de sider, som hører med til gruppens pensum inden for projektopgaven.
3 Der skal være tydelig kildeangivelse, når en regel, sætning eller påstand anvendes uden bevis eller argumentation.
4 For hver af opgaverne *skal* rapporten omfatte en fyldestgørende behandling af problemformuleringen samt svar på spørgsmålene a), b) og c).
Krav til foredraget: Gruppen vælger det mest centrale resultat, som gruppen har arbejdet med. Hvor flere grupper arbejder med den samme projektopgave, må grupperne blive indbyrdes enige om, hvilken gruppe, der fremlægger hvad, så vi ikke kommer til at høre på det samme to gange.
IV. Evaluering: 2 moduler.
Vurdering af rapport med henblik på sammenhæng, væsentlighed, ovenfor formulerede krav, korrekthed.
Vurdering af foredrag med henblik på væsentlighed og klarhed (i tale og i indhold).
Diskussion af positivt og negativt ved arbejdet i grupperne.
Projektopgaver:
Opgave 1: *Hvordan beviser Euklid Pythagoras' sætning, og hvorfor har så stor betydning inden for matematik og inden for anvendelser af matematik?*

a) Hvordan beviser Euklid Pythagoras' sætning, og hvilke sætninger bygger beviset på?
b) Hvilke andre beviser for Pythagoras' sætning findes der, og hvordan adskiller disse sig fra Euklids bevis?
c) Hvilken betydning har Pythagoras' sætning for matematikken?
d) Findes der praktiske anvendelser af Pythagoras' sætning?
e) Hvordan lyder Pythagoras' omvendte sætning, og hvordan bevises den?

Opgave 2: *Hvilke opfattelser har der været/er der af begreberne punkt, linje, delelighed, og hvorfor har en afklaring af disse begreber så stor betydning?*

a) hvilken opfattelse havde pythagoræerne af begreberne punkt og linje , hvordan kan de være nået frem til opfattelsen, og hvorfor måtte opfattelsen opgives?
b) Hvilke problemer vedrørende den rette linje og punktet afslører Zenon med sine paradokser?
c) Hvilken opfattelse af begreberne punkt og linje har Euklid, hvordan kan han være nået frem til opfattelsen, og hvilken status har opfattelsen i dag?
d) Kan et linjestykke deles i det uendelige?
e) Er summen af uendelig mange linjestykker uendelig?

f) Find i en lærebog et bevis for sætningen om ensvinklede trekanter. Gælder dette bevis i alle tilfælde?

Opgave 3: *Hvilke sætninger gælder der for [1] trekantens linjer: Medianer, midtnormaler, højder, vinkelhalveringslinjer og [2] trekantens ind- og omskrevne cirkel? Hvorfor er sætningerne rigtige?*

a) Hvilke sætninger gælder der for de nævnte linjer, og hvordan bevises disse sætninger?
b) Hvad forstås ved et *geometrisk sted*, og hvilke af de nævnte linjer er geometriske steder?
c) Hvordan konstrueres en trekants omskrevne cirkel?
d) Hvordan konstrueres den indskrevne cirkel?
e) Hvad handler formlen 4RT=abc om, og hvordan bevises den?
f) Hvad handler formlen T=rs om, og hvordan bevises den?

Opgave 4: *Hvad har den regulære 5-kant med det gyldne snit vat gøre, og hvilken betydning har den regulære 5-kant?.*

a) Hvordan konstruere en regulær femkant, hvordan begrundes konstruktionen?
b) Hvilken forbindelse er der mellem den regulære femkant og det gyldne snit?
c) Hvilken regulær polygon kan man konstruere ud fra den regulære femkant og en ligesidet trekant (regulær trekant)?
d) Hvorfor kan man ikke konstruere en regulær 15-kant ved hjælp af en regulær 5-kant alene?
e) Hvilke regulære polygoner kan man umiddelbart konstruere ved hjælp af en regulær femkant?

Eksempel 121:
Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter

Hvordan differentierer man funktioner opbygget af en differentiabel funktion f(x)?
Hvordan differentierer man $f(x)^2$ **,** $f(x)^3$ **,** $\frac{1}{f(x)}$ **,** $\frac{1}{(f(x))^2}$ **,** $\sqrt{f(x)}$ **, g(f(x))?**

Formål: At udvikle fortrolighed med differentiabilitet og tretrinsreglen samt at træne elementer fra udledningen af differentialkvotienten for x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$.
At udvikle undersøgekompetencen gennem arbejdsgangen
eksempler →generalisering→verificering.

Mål: At eleverne bliver i stand til selvstændigt at arbejde med tretrinsreglen og til at bestemme differentialkvotienten af en sammensat funktion g(f(x))

Problemformulering: Hvordan differentierer man $f(x)^2$, $f(x)^3$, $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{(f(x))^2}$, $\sqrt{f(x)}$, g(f(x)), når man ved, at f(x) er differentiabel?

Forudsætning: Eleverne har udledt differentialkvotienten for de elementære funktioner x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, og at de har set beviset for konstant-faktor reglen og sum reglen.
Produkt: En rapport som besvarer spørgsmålene i problemformuleringen og omfatter løsning af følgende opgave samt en beskrivelse af arbejdsprocessen, der ledte frem til svaret. Endvidere skal rapporten indeholde en overvejelse over svarets sandhedsværdi.

Opgave: Bestem differentialkvotienten for følgende funktioner:
$\left(x^3+1\right)^2$, $\left(x^4+1\right)^{12}$, $\sqrt{x^4+x^2+1}$, $\frac{1}{x^6+x^4+4}$, $\ln(x^6+x^4+4)$

Tidsforbrug: 6-8 timer

Eksempel 123:
Eksperimenterende forløb om variabelbegrebet: Tilfældige rektangler

'Tilfældige rektangler' er et eksperimentelt projekt, der handler om variabelbegrebet og simple sammenhænge mellem variable. Det forudsætter et elementært kendskab til uafhængige og afhængige variable, samt simple og sammensatte variable. Klassen diskuterer i fællesskab, hvilke variable, der karakteriserer et rektangel. Herefter konstruerer eleverne lange lister over de variable, fx lister over 1000 tilfældige grundlinjer og højder, samt de tilhørende lister over omkreds og areal. Der tegnes XY-punktgrafer til illustration af sammenhængene, som derefter diskuteres i fællesskab: Hvilke figurer afgrænses i de forskellige tilfælde? Hvad bliver ligningerne for de rette linjer, der afgrænser figurerne? Her forudsættes ikke andet end et generelt kendskab til den rettes linjes ligning med betydningen af hældningskoefficienten og skæringen med andenaksen. Man vil også få lejlighed til at præsentere ligningen for en standardparabel $y = k \cdot x^2$, som nogle i klassen typisk vil kende på forhånd, men der forudsættes intet kendskab til parabler.

Mål: – anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data,
– gennemføre simple matematiske ræsonnementer
– anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Projektet egner sig glimrende til starten af grundforløbet. Der er senere muligheder for at vende tilbage til eksperimentet på de højere niveauer i forbindelse med mere avancerede overvejelser indenfor sandsynlighedsregning. Her vil integralregningen nemt kunne bringes på banen.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et HOT-samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb omkring variable og variabelsammenhænge.

Arbejdsformer og timeforbrug: 4×45 minutter
Selve eksperimentet tager nemt en dobbelttime, med introduktion af projektet, instruktion i brug af værktøjer, fx en grafisk lommeregner, udførsel af eksperimentet og lidt fælles diskussion af de grafer, der fremkommer. Dertil kommer en efterbehandling på en dobbelttime med teori: Afgrænsning af figurerne med såvel eksperimentel som teoretisk fastlæggelse af ligningerne for de linjer og kurver, der afgrænser figurerne. Projektet afsluttes fx med en skriftlig rapport, hvor eleverne redegør for eksperimentet, dokumenterer resultaterne i form af tabeller og grafer, og diskuterer grafernes uformning så godt de formår. Specielt de teoretiske argumenter er svære at formulere skriftligt.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at skrive rapporten og udføre eksperimentet med brug af IT-programmer. Her kan man med fordel introducere det graftegneprogam, man alligevel vil benytte i det daglige. Det kan fx være regnearket Excel, statistik og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. Eneste krav er adgangen til at frembringe lister over tilfældige tal og grafer for sådanne lister på simpel vis. Ligeledes kan enhver grafisk lommeregner bruges, hvis blot den indeholder kommandoer til frembringelse af lister med tilfældige tal i enhedsintervallet.

Undervisningsmaterialer: Eksperimentet er beskrevet i detaljer i hæftet 'Some like it hot'. Der er tale om et lærermateriale med diskussion af mulige konklusioner på eksperimentet, samt omtale af hvordan forskellige redskaber kan anvendes i eksperimentet. Elevinstruktionen kan fx stå på et A4-ark og kræver ikke nogen selvstændig tekst.

Eksempel 124:
Eksperimenterende forløb: Hvordan finder man tangenten?

Formål: At udvikle fortrolighed med tangentbegrebet, herunder forståelse af at tangenthældningen er en funktion, gennem
-tegning af tangenten til en graf i et punkt ved hjælp af en grafregner eller et matematikprogram
-aflæsning af ligning og hældning grafregner eller et matematikprogram
-ud fra en tabel over tangenthældning for en elementær funktion at nå frem til en forskrift for tangenthældningen ved at benytte metoden
tabel→plot→forskriftstype(grafkending)→regression→check ved sammenligning af resultat og tabelplot
-udledning af den afledede for simple funktioner: sekant er en approksimation, bedre approksimation ved mindre tilvækst, "grænseværdi"
Endvidere at udvikle og bruge evnen til at genkende en graf. At øve og anvende metoden til at komme fra tabel til forskrift. At øve og skærpe undersøgekompetencen gennem arbejdsgangen
eksempler →generalisering→verificering
ved at stille større krav til verifikationen (her kommer eleverne tæt på at skulle bevise de opstillede hypoteser).

Mål: At eleverne bliver i stand til at bestemme en ligning for tangenten til grafen for en funktion af typen $f(x)=x^a$ med og uden elektroniske hjælpemidler

Problemformulering: Hvordan bestemmer man tangenten til grafen for funktionerne $f(x)=x^a$ i et givet punkt? Hvilke begrundelser er der for rigtigheden af den valgte metode?

Produkt: En rapport som besvarer spørgsmålene i problemformuleringen og omfatter løsning af følgende opgave samt en beskrivelse af arbejdsprocessen, der ledte frem til svaret. Endvidere skal rapporten indeholde en overvejelse over svarets sandhedsværdi.

Opgave: I) Benyt grafregner eller et matematikprogram. Betragt funktionen $f(x)=x^2$. Tegn grafen for *f*(*x*). Tegn ved hjælp af grafregner eller program tangenten til grafen i P(1,f(1)). Aflæs ligning fra grafregner eller program. Aflæs tangenthældningen. Udfør det samme arbejder med andre tangenter. Udfyld en tabel som følgende:

x-koordinat til punktet på grafen	-1	1	2	3	4	5
Tangenthældning a punktet						

Lav et plot af tabellen. Gæt på en sammenhæng mellem x og *a*. Bestem det bedste gæt. Verificér gættet.
Benyt samme fremgangsmåde til at opnå et gæt på tangenthældningen for mindst 3 af funktionerne
x^3, x^4, x^5, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\ln x$.

II) Betragt $f(x)=x^2$ og punktet P(2,f(2)). Tegn sekanten gennem P og Q(3,f(3)). Sekanten er en approksimation til tangenten. Benyt sekanten til at opnå en approksimation til tangenthældningen i P. Gør approksimationen bedre gennem en række trin, hvor Q kommer tættere på P. Hvad skal der til for at hoppe fra approksimation til hældningen *a*?

Tidsforbrug: 6-8 timer

Eksempel 161:
Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst

Din bog er ikke din egen, men udlånt fra skolen. Derfor kan du hverken understrege de vigtige ting i en tekst eller tilføje argumenter og mellemregninger, hvor det er nødvendigt. Men selvom det var din egen bog , ville det være nødvendigt at tage notater i tilknytning til læsningen. Fx fordi understregninger ofte kræver kommentarer eller uddybninger, der er mere omfattende end bogens margin tillader.
Trin 1: Forhåndsforståelse. Hvad handler teksten om? Hvad ved jeg om emnet i forvejen? Handler teksten om det, er foregik i undervisningen (Brug notater fra sidste lektion)?
Trin 2: Overblik . Hvilken type tekster består teksten af?
Lærestof: eksempel, sætning, bevis, anvendelse?
Læsestof: Introduktion til et emne, en definition, en sætning eller et bevis? Perspektiverende tekst?
Trin 3: Indlæring**.** Afhængig af teksttype:
Teksttype 1: Eksempel**:** Læs problemstillingen. Tegn, hvis det er muligt. Hvad er givet, hvad skal findes? Opfat eksemplet som en udvidet facitliste til en opgave, der skal løses.
Prøv at løse problemet selv!
Hvis du kunne løse problemet, sammenlign med tekstens løsning.
Hvis du ikke kunne løse problemet, begynd læsningen. MED PAPIR OG BLYANT. Hvis teksten beskriver en figur, så tegn figuren ud fra teksten. Sammenlign med tekstens tegning.
Kan du nu løse problemet alene?
Hvis ikke, så læs videre – skriv hvert skridt ned. Tilføj mellemregninger. Argumenter for hvert skridt i løsningsprocessen. Prøv hele tiden at gå videre med løsningen uden at se i bogen.
Når du er kommet til vejs ende, skal du
- Gøre dig klart, om der var problemer (fx begrundelser), som du ikke kunne finde ud af.
- Formulere hvert enkelt problem så præcist som muligt, skriv præcist ned, hvor problemet dukker op i teksten.
Repetere: Hvad var problemstillingen? Kan du gennemgå løsningen uden at kigge i teksten? Først når du er i stand til dette, har du tilegnet dig **lærestoffet** !
Teksttype 2: Sætning, regel, formel/bevis:
Hvad siger sætningen, reglen, formlen? Hvordan bruges den? Tag dine notater fra undervisningen til hjælp. Blev beviset gennemgået i klassen? Har du udført beviset i klassen? Prøv, om du kan gennemføre beviset uden at støtte dig til teksten. Hvis du ikke kan det, så gå frem som ovenfor under Eksempel.

Du har først tilegnet dig lærestoffet, når du er i stand til at gennemgå beviset uden at støtte dig til teksten.
Når du er nået til vejs ende, skal du efterbehandle arbejdet:
Hvad var givet, hvad skulle bevises?
Hvad var hoved-ideen i beviset?
Var der problemer med begrundelserne? Hvor præcist opstod de? Skriv ned, og formuler så præcist som muligt, hvad problemet var.

Eksempel på spørgsmål til en lektie i matematik

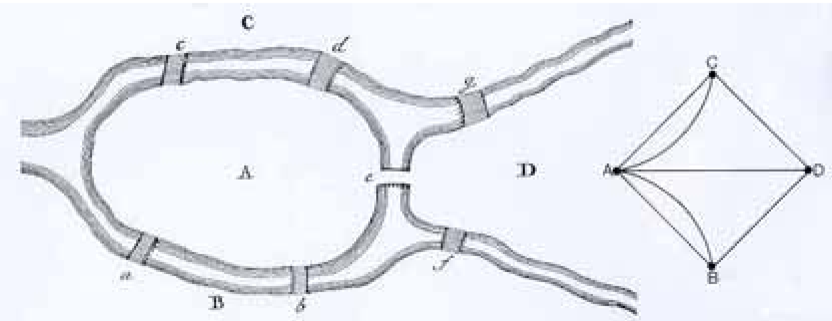
Øvelse 1. Tekst: Lærebog, indledende afsnit om: Geometri
Besvar spørgsmålene i TRIN 1 og TRIN 2 i opskriften ovenfor.
I dine notater skulle der gerne være svar på følgende spørgsmål:
Hvad betyder ordet geometri?

Hvorfor er det nødvendigt at måle og veje?
Hvorfra og fra hvornår stammer de ældste vidnesbyrd om arbejde med geometri? Hvilken form for geometri var der tale om?
Hvornår begyndte man at begrunde metodernes rigtighed?
Hvordan lyder formlen for en trekants areal?
Hvordan finder man arealet af en firkant?
Hvad er en spids vinkel? En stump vinkel?
Tegn en trekant og kald den PQR. Hvordan betegnes trekantens sider?
Tegn en grundlinje og den tilsvarende højde i en trekant.
Hvad er et trapez?
Hvad siger Pythagoras' sætning for trekant PQR, $P=90^{o}$?
Hvad siger Pythagoras' omvendte sætning?

Øvelse 2: Tekst: Lærebog om Geometri og trigonometri, side ... (afsnit om sætninger og beviser).
Besvar spørgsmålene vedrørende lærestof i opskriften ovenfor. Anvend TRIN 3, teksttype, og besvar spørgsmålene her.
Dine studienotater skulle gerne indeholde svar på spørgsmål som følgende:
Hvor står den sætning, teksten handler om? Hvor begynder beviset – hvor slutter det?
Hvilke mellemregninger, som ikke er anført i bogen, havde du svært ved at forstå?
Ud af beviset træder der en bonus frem: En ny formel for arealet af en trekant. Hvad siger formlen?
Side ... : Teksten er *lærestof*. Den består af øvelser og eksempler.
Anvend TRIN 3, teksttype 1. Besvar spørgsmålene her.
Dine notater skulle gerne indeholde svar på følgende spørgsmål:
I bogens bevis er der en indskrænkning, et forbehold. Øvelse ... handler om dette forbehold? Hvad er forholdet i det gennemførte bevis?
Hvilket problem skal løses i eksempel ...? Prøv at løse problemet, før du læser i bogen.
Øvelse ... er egentlig et eksempel: Det *lumske tilfælde*.
Hvad er det lumske ved problemet? Hvad kendetegner det lumske tilfælde?
Løs problemet i sidste linje i eksemplet.

Eksempel 163:
Eksempel på matematisk tekst: Broerne i Königsberg

Königsberg var en by i Østpreussen. I dag hedder den Kaliningrad, og er en del af Rusland. I 1700-tallet opstod problemet om, hvorvidt man kan foretage en vandring i byen, således at hver bro krydses netop en gang, og således at vandringen slutter, hvor den begyndte.
Broerne er vist i nedenstående tegning til venstre. Til højre vises en skematisk figur af broerne, en såkaldt graf.



Grafen består af fire punkter, der repræsenterer de fire landområder til venstre, samt syv kurver (der kaldes kanter), der repræsenterer de syv broer, der skal krydses netop en gang. Hvis man eksperimenterer lidt, finder man hurtigt ud af, at man ikke kan foretage den ønskede vandring. Men hvordan kan man bevise det? Det elegante svar blev givet af den berømte matematiker og fysiker Leonhard Euler (1707-1783). Lad os fokusere på et område i bykortet eller (hvilket er det samme) et punkt f.eks. D i grafen. Lad os nu antage, at vi kan foretage den ønskede vandring. Hver gang vi gennemløber en kant, sætter vi en pil på kanten, der viser, hvilken retning vi går. Umiddelbart efter at vi går ind til punktet D, går vi ud fra punktet D. Heraf følger let, at antallet af indgående pile til D må være det samme som antallet af udgående pile fra D. Dvs at det samlede antal kanter, der støder ind til D, er lige. Men i grafen, der illustrerer de Königsbergske broer, har nogle (ja faktisk alle) punkter et ulige antal tilstødende kanter, eller som man også udtrykker det: de har ulige valens. Man kan altså ikke foretage den ønskede vandring.
Problemet kan generaliseres: Man kan spørge om kanterne i en hvilken som helst sammenhængende graf kan gennemløbes, således at hver kant gennemløbes netop en gang, og således at man slutter i samme punkt som man startede. Vi har set, at en nødvendig betingelse for, at dette kan lade sig gøre er, at alle punkter har lige valens. Den betingelse er faktisk også tilstrækkelig. Dette resultat opfattes som starten på den matematiske disciplin, der kaldes grafteori, og det indgår som en ingrediens i mange resultater. Et eksempel er det kinesiske postbuds problem. Et postbud starter på posthuset i en given by og skal omdele post i alle gader. Ruten skal tilrettelægges, så den samlede vandring bliver kortest mulig. Dette problem kan løses i praksis selv for meget store byer, og i løsningen indgår løsningen til de Königsbergske broers problem.
Den handelsrejsendes problem består i at gennemløbe en given graf, så alle punkter besøges mindst en gang. Problemet minder om det kinesiske postbuds problem og dermed også om de Königsbergske broers problem, idet man her blot skal gennemløbe alle punkter i stedet for alle kanter. Da der i almindelighed er færre punkter end kanter, kunne man tro, at den handelsrejsendes problem typisk er lettere end de Königsbergske broers problem. Det forholder sig ganske modsat.

Prøv feks at gennemløbe et skakbræt med en springer så hvert felt gennemløbes mindst en gang og springeren flytter så få gange som muligt og vender tilbage til udgangspunktet. Det mindste antal træk er 64, men de fleste vil bruge lang tid på at finde løsningen.
Det er et vigtigt uløst problem at forstå og udarbejde effektive metoder til at løse den handelsrejsendes problem, mens det kinesiske postbuds problem er fuldstændigt afklaret. Dette illustrerer det fascinerende fænomen, at løste og uløste matiske problemer kan ligge meget op ad hinanden formuleringsmæssigt. Disse og andre grafteoretiske problemer er beskrevet i nedennævnte artikel.

Artiklen er skrevet af Professor Carsten Thomassen, Institut for Matematik,Danmarks Tekniske Universitet. Citeret fra:
http://www.mip.sdu.dk/mat2000/PostkortMatematik/broer.html

Yderligere læsning:
C.Thomassen, Broer, skak og netværk, Naturens Verden 10 (1992)388-393.

Eksempel 201:
Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge

Forløbet består af en række øvelser med vækstmodeller inden for forskellige anvendelsesområder. Indenfor kernestoffet på C-niveauet beskæftiger det sig især med de følgende to områder:

- formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable
- xy-plot af datamateriale samt karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge samt anvendelse af regression.

Indenfor de faglige mål sigter forløbet især på de følgende overordnede mål:

- håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold
- anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig reflekterende til disse samt til rækkevidde af modellerne

Men dertil kommer også væsentlige bidrag til de følgende to mål:

- demonstrere viden om matematikanvendelse samt eksempler på matematikkens samspil med den øvrige videnskabelige og kulturhistoriske udvikling.
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau
Materialet er udarbejdet med tanke på matematik i grundforløbet (C-niveau). Dele af materialet kan dog også indgå på højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder
Temaet om idræt lægger op til tværfagligt samarbejde med idræt og evt. fysik. Temaet om kropsvægt og andre biologiske størrelser hos pattedyr, samt nedbrydning af rusmidler lægger tilsvarende op til et tværfagligt samarbejde med biologi. Herudover er der oplagte samarbejdsmuligheder med f.eks. det naturvidenskabelige grundforløb om modellering af simple eksperimenter i de naturvidenskabelige fag.

Timeforbrug
Tema om idræt: 10 timer, tema om kropsvægt: 10 timer, tema om rusmidler: 6 timer.

Arbejdsformer
Hovedsagelig øvelsesregning i grupper. Temaet om idræt rummer en del selvstændig elevaktivitet med indsamling af data.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer.
Gode muligheder. Vejledning til relevante aspekter af udvalgte værktøjer – regneark, CAS-programmer og grafregnere – er inkluderet i særskilte afsnit. Brugen af sådanne hjælpemidler er påkrævet for at få det fulde udbytte af undervisningsforløbet. Forløbet kan udmærket gennemføres alene med PC-værktøjsprogram, f.eks. et regneark som Excel. Råder klassen over grafiske lommeregnere, f.eks. TI-84, er det også muligt at gennemføre forløbet alene med støtte fra disse.

Undervisningsmaterialer / er det tilgængelige lærermaterialer eller elevmaterialer?

Hæftet ”Vækst”, som er placeret på fagets side på emu’en. Forløbet kan baseres udelukkende på dette hæfte.

Eksempel 205:
Tak for kaffe - Et forløb om lineær og eksponentiel regression

Materialet er skrevet i to dele og disse kan læses uafhængig af hinanden.
Forløbets første del tager udgangspunkt i opvarmning af vand med en hjemmelavet dyppekoger. Der måles en sammenhæng mellem tid og temperatur og måleresultaterne indtastes i et regneark. Der tegnes x-y-plot og der indlægges bedste rette linje gennem punkterne.
I anden del af forløbet afkøles vandet igen og der måles igen sammenhæng mellem tid og temperatur. Man beregner forskellen på temperaturen af vandet og omgivelserne og der tegnes en graf med tiden på x-aksen og temperaturforskellen på y-aksen. Der laves eksponentiel regression i Excel.
Undervisningsmaterialet indeholder

- elevmateriale
- tastevejledninger til Excel
- lærervejledning

Niveau: Grundforløbet.

Samarbejde: Forløbet er velegnet til samarbejde med fysik og naturvidenskabelig grundforløb.

Timeforbrug: 10 – 15 timer.

Arbejdsformer: Forløbet skal afvikles som gruppearbejde. Forløbet er opbygget omkring eksperimenter i fysik – opvarmning og afkøling af vand. Det meste af forløbet kræver, at eleverne arbejder ved en computer.

IT Forløbet er skrevet til Excel, men kan rimelig let oversættes til OpenOffice eller anden tilsvarende program med regneark.

Undervisningsmaterialet kan hentes på fagets side på emu'en

Eksempel 210:

Arvelighed, betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov

- et samarbejde mellem matematik og biologi

Genetik er et klassisk samarbejdstema mellem matematik og biologi. Matematisk set arbejdes der her med vejet gennemsnit og frekvensfordeling af generne. Endvidere arbejdes med statistisk fordeling af generne og statistisk beskrivelse af de egenskaber (fx sygdomme) som bestemte arveanlæg kan medføre med forhøjet sandsynlighed. Emnet lægger op til flere praktiske eksperimenter i biologi med arveegenskaber og undersøgelser i databanker.

De nye bioteknologier, fx genmanipulation og fosterscreening, lægger op til vurderinger, der bygger på anvendelse af statistik og sandsynligheder, også har en udpræget etisk dimension vi et samarbejde med dansk og religion være nærliggende.

Mål: - indsamling og bearbejdning af data til belysning af en (på baggrund af statistik) opstillet hypotese.

- anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

Niveau: Kan benyttes fra C-niveau og opefter. Det vil være en stor fordel at tilrettelægge forløbet på et tidspunkt, hvor klassen også har biologi.

Samarbejdsmuligheder: Velegnet til et samarbejde med biologi, dansk og engelsk. Hvis moderne bioteknologi inddrages, vil emnet være oplagt som et forløb i Almen studieforberedelse.

Arbejdsformer og timeforbrug:
I matematik kan man med klassen gennemgå den klassiske populationsgenetik (Mendels love, Hardy-Weinbergs lov). Man kan også inddrage eksempler på betingede sandsynligheder. Dette kan gøres eksemplarisk ud fra skematisk opstilling af værdierne for to variable (fx rygere/ikke-rygere; lungekræft/ikke-lungekræft), da den teoretiske behandling af betingede sandsynligheder ofte vil være meget vanskelig for eleverne. Dette kan så indgå i vurderinger af personers arveligt betingede sandsynlighed for at udvikle bestemte sygdomme. Efter denne introduktion kan eleverne så arbejde emneorienteret i grupper med emner, som lærerteamet på forhånd har udvalgt. Man kan tilrettelægge et rollespil og etiske emner i forbindelse hermed ud fra en konkret case. Det kunne at skulle tage stilling til om man skal tilråde en abort i tilfælde, hvor fosteret har vist anlæg for en bestemt sygdom. Her kunne eleverne repræsentere forældrene, lægerne, statistikere, samfundsøkonomer, religiøse (kristne og muslimer fx) og indlede med at finde ud af, hvilke synspunkter sådanne personer kunne have, og så med disse synspunkter optræde i en paneldebat for klassen. Man kunne også lade et sådan forløb udmunde i, at klassen tilrettelægger en temadag for hele skolen og bio-etiske spørgsmål og får markante kulturpersonligheder og eksperter til at holde oplæg.

Undervisningsmaterialer:
I matematik kan man fx finde en god introduktion i ”Matematiks anvendelser i biologi” Munksgaard 1974.

Eksempel 211:
Sandsynlighedsregning og retsgenetik
- et samarbejde mellem matematik og biologi

Sandsynlighedsregning har mange anvendelser i biologi. I forbindelse med eksempelvis kriminalsager, familiesammenføringssager eller faderskabssager opstår der ofte behov for identifikation af personer ud fra kendskab til blodtyper eller genetisk information. Sandsynlighedsregning er et nødvendigt redskab i sådanne identifikationssager. For at kunne beregne, at en given mand er 10.000 gange så sandsynlig som fader til et barn end en tilfældig mand, kræves et indgående kendskab til regning med betingede sandsynligheder og Bayes' formel.
Beregningerne kompliceres let, hvis man for eksempel ikke har adgang til biologisk materiale fra den formodede far, men kun fra nogle nært beslægtede. Computerprogrammet "Hugin" kan benyttes til løsning af de komplicerede problemstillinger ved hjælp af opstilling af såkaldte Bayesianske net.

Mål: at anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

Niveau: Matematik A-niveau eller B-niveau

Samarbejdsmuligheder:
I biologi på B-niveau eller A-niveau undervises som en del af kernestoffet i genetik samt nedarvningsmønstre. Endvidere skal eleverne i biologiundervisningen se eksempler på undersøgelses- og analysemetoder inden for genetik – eksempelvis PCR. Disse elementer kan oplagt kombineres med sandsynlighedsregning i matematik på A- eller B-niveau. Sandsynlighedsregningen er en del af det supplerende stof.

Arbejdsformer og timeforbrug:
Forløbet kan tage fra 5-20 timer afhængig af, hvor meget "Hugin" skal inddrages. Eleverne skal på forhånd have stiftet bekendtskab med sandsynlighedsregning og elementær arvelighedslære - herunder blodtyper. Efterfølgende indførelse af Bayes' formel og beregninger på simple eksempler tager 8-10 timer.
I den indledende del af forløbet vil lærerstyret gennemgang af begreberne være fordelagtigt. Senere i forløbet bør eleverne arbejde i grupper, enten med forskellige opgaver eller med de samme opgaver. Arbejde med "Hugin" kan passende finde sted som pararbejde.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer:
Computerprogrammet "Hugin" samt grafregner. Excel er meget anvendeligt til behandling af PCR-resultater.

Undervisningsmaterialer:
Matematikbog indeholdende basal sandsynlighedsregning.
En demoversion af programmet "Hugin" kan downloades på hjemmesiden:
http://www.hugin.com/Products_Services/Products/Demo/
Se endvidere eksempel på undervisningsmaterialer på fagets side på emu'en.

Finn V. Jensen: ”Introduction to Bayesian Networks”, Institut For Matematik og datalogi, Aalborg Universitet 1993.

Eksempel 214:
Diabetes type 2 – problemer med diagnose og behandling
- et samarbejde mellem matematik og biologi

Emnet:
Diabetes er et velegnet eksempel på fejl i kroppens homeostase-regulering. De generelle forhold især om Diabetes type 1 vil ofte være gennemgået på et tidligt tidspunkt i biologiundervisningen (uden nødvendigvis at inddrage matematik). Diabetes type 2 er på mange måder vanskeligere at gå til. Forhold omkring diagnose og behandling udviser stor variation, hvilket gør det oplagt at inddrage matematikken.

Udgangspunktet for forløbet er følgende:
1) et omfattende og autentisk data-materiale om en større person-gruppes generelle fysiologiske forhold samt om deres reaktioner på forskellige test med glucose-belastning.
2) en model som beskriver sammenhængen mellem målbare parametre og de parametre, som har afgørende betydning for homeostase-reguleringen af glucose i blodet.

Materialet kan bruges til flere del-forløb:
- undersøgelse af variation og regelbundethed i forskellige fysiologiske parametre
- anvendelse af modeller til beskrivelse af fysiologiske forhold og processer
- anvendelse af modeller til vurdering af hvilken diagnose der kan stilles samt effekter af behandling

Niveau:
Matematik B- eller A-niveau. Biologi B- eller A-niveau.

Samarbejdsmuligheder:
Udvalgte dele af menneskets fysiologi, herunder reguleringssystemer samt stofskifte er en del af kernestoffet i biologi på både A- og B-niveau.

Timeforbrug:
Forløbets omfang kan variere meget. 8-16 timer er et realistisk bud afhængigt af, hvor mange ting, der tages op.

Arbejdsformer:
Arbejde i mindre grupper vil være oplagt.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
Er ubetinget nødvendigt.

Undervisningsmaterialer: På fagets side på emu'en er placeret:
Data-fil med autentisk materiale
Data-model
Relevante artikler

Eksempel 220:
Statistik og vælgeradfærd
- et samarbejde mellem matematik og samfundsfag

Hvem stemmer på hvilke partier? Valgforskere og meningsmålingsinstitutter undersøger hele tiden, hvad de danske vælgere ville stemme, hvis der var valg i morgen, og hvorledes partivalget afhænger af alder, køn, uddannelse, stilling og bopæl. Dette materiale er særdeles velegnet til arbejde med statistik.

Mål
Formålet er at give eleverne/kursisterne forståelse for indholdet og budskabet i opinionsundersøgelser.

Niveau
Forløbet kan gennemføres på forskellige niveau med forskelligt indhold:
- for C-niveau på hf og i gymnasiet ved at anvende materialet fra fagets side på emu'en
- for B-niveau på hf og i gymnasiet og A-niveau i gymnasiet ved at arbejde mere indgående med emnet.

Samarbejdsmuligheder
Forløbet kan tilrettelægges i samarbejde med samfundsfag.

Arbejdsformer
I forskellige dele af forløbet vil forskellige arbejdsformer være naturlige. I den indledende del vil traditionel lærergennemgang vekslende med øvelser være bedst og senere i talbearbejdelsen og spørgeskemaprojektet vil gruppearbejde være det mest optimale.

Timeforbrug
Timeforbruget i C-niveau vil være 6-8 klokketimer.
Timeforbruget i B- og A-niveau vil være 10-12 klokketimer inkl. empirisk undersøgelse med efterbearbejdning.

Anvendelse af it
Regneark eller statistiske programmer indgår.

Indhold
C-niveau:
Hvordan finder man frem til hvor nøjagtige opinionsundersøgelser er? (jf. undervisningsmaterialet)
B- og A-niveau:
Samfundsfag indeholder emneområdet politik, og vælgeradfærd er en del af kernestoffet. Inden samarbejdet med matematik etableres skal de politiske partier og det danske politiske system være gennemgået i samfundsfagsundervisningen. Herefter følger et forløb, hvor man beskriver og analyserer de danske vælgeres adfærd ud fra det tilgængelige datamateriale og til slut kan eleverne selv lave en empirisk undersøgelse ved fx at indsamle oplysninger om, hvad eleverne (opdelt på piger og drenge) på deres egen skole ville stemme, hvad deres forældre stemmer, hvilken uddannelsesbaggrund deres forældre har osv.
De kan så undersøge om forældrenes partivalg har betydning for deres partivalg, om der er forskel på pigers og drenges partivalg, om forældrenes uddannelsesbaggrund ser ud til at betyde noget osv.

Såvel deskriptiv statistik, middelværdi, spredning, kvartilsæt, histogram, sumkurve som hypotesetest (chi^2-test) kan illustreres og anvendes i forbindelse med disse data.

Undervisningsmaterialer
Til C-niveau:

- Hans Vestergaard og Jette Rygaard Poulsen: Hvad er meningen? Et forløb om opinionsundersøgelser. Findes på fagets side på emu'en.

Til B- og A-niveau:

- Gængse lærebøger om deskriptiv statistik.
- Samfundsfag/Den digitale håndbog til samfundsfag – udgives i opdateret udgave hvert år ved juletid. Forlag Columbus.
- www.statistikbanken.dk
- www.gallup.dk
- Per Vejrup-Hansen, Statistik med Excel, Samfundslitteratur.
- www.samfundsfag.aau.dk, hvor eleverne/kursisterne kan hente data fra en vælgerundersøgelse af valget i 2001

Eksempel 221:
Stikprøver og databaser et forløb indenfor emnet statistik

'Stikprøver og databaser' er et forløb, der introducerer Explorative Data Analysis (EDA) til analyse af spørgeskemaer og stikprøver fra fx databaser. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale enten frembragt af eleverne selv, fx via en spørgeskemaundersøgelse, eller hentet på nettet i en passende database. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis og der udpeges/undersøges mulige variabelsammenhænge. Forløbet kan eventuelt udvides med en undersøgelse af vigtige statistiske egenskaber for stikprøver i en sådan database.

Mål: – anvende simple statistiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale, kunne stille spørgsmål ud fra modellen, have blik for, hvilke svar der kan forventes, og være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog
– anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Projektet egner sig til både til grundforløbet og til højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan fint indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse af datasæt. Det vil også afhængigt af det valgte tema kunne indgå i almen studieforberedelse.

Arbejdsformer og timeforbrug: 8×45 *minutter*
Klassen introduceres til de begreber og metoder der er karakteristiske for EDA, dvs. specielt de karakteristiske grafiske værktøjer som fx XY-punktgrafer, kassegrafer og histogrammer til opdagelse af karakteristiske mønstre og sammenhænge, men også til simple kvantitative mål som middelværdier, medianer og kvartiler. Derefter stilles et spørgeskema eller en database til elevernes rådighed for den følgende analyse. Man kan fx udnytte at man på mange skoler som led i en indledende snak med klassen om deres forudsætninger og forventninger indleder skoleåret med en spørgeskemaundersøgelse af elevernes fritidsvaner, lektievaner, forventninger til gymnasiet osv. Hvis disse data opsamles elektronisk kan de nemt konverteres til en fælles database, hvor oplysningerne om eleverne fremstår i en passende anonymiseret form. Eleverne kan derefter udvælge forskellige størrelser (variable) med henblik på en afklaring af hvilke andre variable, der kan tænkes at påvirke eller blive påvirket af den givne størrelse ligesom man kan undersøge om der er forskel mellem forskellige grupper, om der er størrelser, der varierer sammen osv. Undersøgelsen kan munde ud i en skriftlig rapport om de fundne sammenhænge, hvor der sættes ord på tolkningen af graferne, ligesom den kan munde ud i en mundtlig fremlæggelse/diskussion med klassen af de sammenhænge, man mener at have påvist.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at bruge det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel eller statistik- og modelleringsprogrammet Fathom.

Undervisningsmaterialer: Man kan finde eksempler på en sådan tilgang til spørgeskemaanalyser i hæftet: Spørgeskemaanalyser. I dette hæfte refereres til en stor tysk spørgeskemaundersøgelse af gymnasieelevers fritidsvaner Muffins, der er tilgængelig på nettet.
På nettet findes desuden adskillige diskussioner af Explorative Data Analysis. Fx kan man finde en detaljeret gennemgang EDA fra en naturvidenskabelig synsvinkel i kapitel 1 af håndbogen 'Engineering Statistics Handbook', der frit kan downloades fra nettet stillet til rådighed af det amerikanske National Bureau of Standards.

Eksempel 224:
Velfærdssamfundet og befolkningsudvikling i Danmark
- et samarbejde mellem matematik og samfundsfag

Emnet:
I debatten om velfærdssamfundets udvikling nævnes udviklingen i befolkningssammensætningen ofte som en af de store udfordringer som velfærdssamfundet står over for. Fremskrivninger af befolkningstallene tyder på at der i om 20 – 40 år vil være langt flere passivt forsørgede (børn og unge under uddannelse og ældre på pension) i forhold til antal erhvervsaktive end i dag. Diskussionen kan få stor betydning for de politiske beslutninger som tages vedrørende udviklingen af velfærdssamfundet, og der er god grund til at interessere sig for disse prognosemodeller og deres holdbarhed i matematikundervisningen. Og mulighederne er mange. Man kan arbejde med selve modelaspektet (regner man 40 år ud i fremtiden regner man på en stor gruppe som end ikke er født endnu) og med fremskrivningsfaktor (eksponentialfunktion). Inddrager man Dream-model-gruppens arbejde (som velfærdskommissionen bl.a. bruger) kan man arbejde med estimering af koefficienter (regression), med differentialligninger og sandsynlighedsregning alt afhængig af hvilket niveau man har og hvor langt man er kommet i forløbet.

Formål:
- kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold
- anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger

Niveau:
B- eller A-niveau afhængig af hvad man vælger at fokusere på.

Samarbejdsmuligheder:
Undervisningsforløbet kan med fordel tilrettelægges i et samarbejde med samfundsfag på en studieretning. Velfærdssamfundet og udfordringerne for velfærds-samfundet er et emne som gennemgås på begge niveauer. Men forløbet kan også være et tema i almen studieforberedelse, hvor den historiske baggrund for udviklingen af det danske velfærdssamfund i 1900-tallet gennemgås i historie, dansk og hvor matematik inddrages.

Indhold:
Matematik: Eventuelt beregning af personskat i Excel. En model for en virksomhed. Selskabsskatter, moms og virksomhedsadfærd. Virksomhedens produktions-funktion, grønne afgifter. (Nikolaj Malchow-Møller :"Matematik og økonomi", kapitel 2 og 3 (eventuelt kun til s.45) samt opgaver til kapitlerne).
Samfundsfag: Velfærdsmodeller. Velfærdsstaten under pres. De forskellige former for skat.
Gruppearbejde med **Finansminister-spillet.** Lafferkurven og artiklen : "Afgiftspolitik: Danmark i top med grønne afgifter"
Fælles: Diskussion/tolkning af resultaterne af modelberegningerne.
Evaluering af forløbet. Et afsluttende selvstændigt gruppearbejde/projekt, hvor begge fag indgår og som bedømmes i begge fag.

Timeforbrug:
Der vil være meget stor forskel på hvor lang tid et forløb kan tage – fra 5 til 20 timer afhængig af valget af de matematiske emner.

Arbejdsformer:
Lærerstyret gruppearbejde og mere selvstændigt projektarbejde.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
Excel regneark og almindelige grafregnere.

Undervisningsmateriale:
Gængse lærebøger i matematik.
Samfundsfag/Den digitale håndbog til samfundsfag – udgives i opdateret udgave hvert år ved juletid. Forlag Columbus.
www.statistikbanken.dk
www.dreammodel.dk
Jørn Henrik Petersen og Jesper Jespersen: Velfærdsstat og fordeling mellem generationer fra ”13 udfordringer til den danske velfærdsstat”, redigeret af Jørn Henrik Petersen og Klaus Petersen, Syddansk Universitetsforlag.

Eksempel 236:
Kasteparablen i idrætten
- et forløb til i samarbejde med fysik, idræt eller til almen studieforberedelse

Formål: Eleverne skal indse, at der findes umiddelbare sammenhænge mellem de tre fag. De skal lære at se den fysiske kasteparabel i de idrætter de normalt beskæftiger sig med, og de skal lære at beskrive den med matematiske udtryk.

Mål: Eleverne skal ud fra videoklip af (evt flere forskellige) kast i idrætten hente måleresultater, som sætter dem i stand til ved regression af finde den matematiske sammenhæng mellem forskellige variable, og derigennem efterprøve teorien for det skrå kast, herunder påvisning af at den vandrette hastighed i bevægelsen er konstant samt måling af tyngdeaccelerationen.

Tidsramme: 10-12 lektioner
2 lektioner til videooptagelser, 4-6 lektioner til videoredigering (indsætning af koordinatsystem og aflæsning af data), 2 lektioner til databehandling, 2 timer til rapportskrivning.

Problemformulering: *Følger et hvert objekt samme bevægelsesbane i et kast?* Fx basketball (lay-up), fodbold (halvtliggende vristspark), tennis (forhånd, flugtning), bordtennis (forhånd), badminton (clear), volleyball (fingerslag, baggerslag), salto på gulv osv.

Procedure:
Man optager et basketball kast (videoklip, digitalt, typisk 25 billeder pr. sek) med kalibreringskegler til afstandsmåling. Boldens bane plottes i et (x,t)-koordinatsystem og i et (y,t)-koordinatsystem med y-aksen gennem personen, der kaster og med x-aksen på gulvet, hvor boldmarkeringen/punktet afsættes for hver 1/25 sekund (eller hvor mange billeder man nu ønsker at bruge). Man lægger så et koordinatsystem ind i videosekvensen. Hvis man har videoredigeringsværktøj til alle, så kan eleverne arbejde i grupper med hver deres kast/idræt, ellers kan man bruge færre billeder og lade eleverne lave deres eget diasforløb over disse. Alternativt kan alle arbejde med samme kast, som læreren har forberedt.
Herefter opstiller eleverne en tabel med t-, x- og y-værdier, som de kan bearbejde med henblik på at finde sammenhængen mellem x og t (lineær regression) samt bestemme den vandrette hastighed, som jo er konstant. De kan finde sammenhængen mellem y og t (kvadratisk regression), bestemme en model for den lodrette hastighed ved at differentiere $y(t)$ og give et skøn over den lodrette hastighed til forskellige tidspunkter fx når bolden rammer kurven i et basketballkast. Endvidere kan de give et skøn over den lodrette acceleration, som jo også er konstant.

Produkt: Rapport (eksempel på indhold)
Gør kort rede for teorien omkring det skrå kast.
Ud fra det bearbejdede videoklip/diasshow skal I udfylde et skema svarende til følgende ved aflæsning af boldens koordinater (antallet af data vælge man selv afhængig af procedure):

t/s	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
x/m									
y/m									

Indlæs alle data i dit matematikprogram/grafregner.

Opgaver:

- Lav et (x,t)-plot og find ved regression den matematiske sammenhæng, der er mellem den vandrette afstand *x* og tiden *t*. Beskriv denne sammenhæng samt den måde hvorpå I har fundet frem til denne.

- Giv ud fra den fundne sammenhæng et skøn over den vandrette hastighed, som objektet bevæger sig med.

- Lav derefter et (y,t)-plot og find ved regression den matematiske sammenhæng der er mellem den lodrette afstand y og tiden t. Beskriv denne sammenhæng samt den måde hvorpå I har fundet frem til denne.

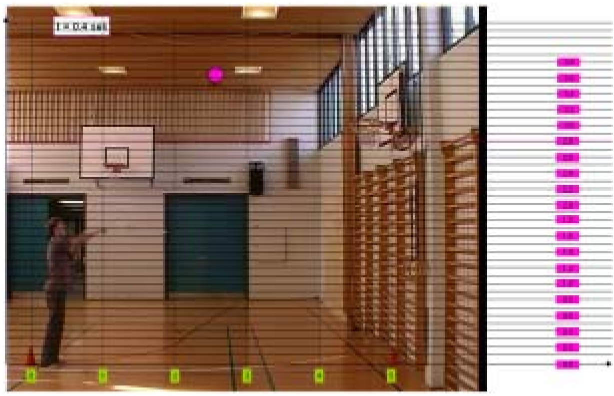
- Find ud fra den sammenhæng I har fundet mellem *y* og *t* et udtryk for den lodrette hastighed, som objektet bevæger sig med (enten ved regression på $\frac{y}{t}$ og *t* eller ved differentiation (2.g)), og find den lodrette hastighed til tiden $t = 0$ og til tiden hvor bolden går i kurven (basketball) eller stoppes af en medspiller (andet).

- Bestem herefter et mål for tyngdeaccelerationen ud fra den fundne sammenhæng mellem den lodrette hastighed v_y og tiden *t*. Kommenter resultatet.

- Rapporten skal indeholde alle anvendte tabeller og plots.

Evt. udvidelse:
Eleverne kunne overveje hvor god modellen er, idet begreber som forklaringsgrad (r^2), korrelationskoefficient (r) og mindste kvadraters metode inddrages.
Endvidere kan man arbejde med en sammenklipning af de forskellige kast, som præsenteres sammen med teorien i en lille videofilm, som kan vises for andre på skolen, forældre etc.

Eksempel på diasbilleder:



Eksempel 270:
Rum og dimension – om Abbott Abbotts Flatland
- et samarbejde i almen studieforberedelse eller mellem matematik og engelsk

Indhold og problemformuleringer: Hvordan oplever vi rummet? Hvad gør rumopfattelsen ved os? Kan vi forestille os, at rummet kunne se anderledes ud, end vi tror? Kan vi forstå, hvad et krumt rum er? Kan vi leve i et krumt rum? Kan vi opdage, at vi lever i et sådant rum? Hvad er den fjerde dimension?
Det er lettere at få et indtryk af disse spørgsmål, når man bevæger sig en dimension ned fra den 3 dimensionale verden: Hvordan ville livet i Flatland være? Hvordan ville fladlænderne opleve hinanden? Hvordan ville de opleve krumningen, hvis de levede på en kugle? Her er det så heldigt, at E.Abbott Abbott har givet sin version af livet i Flatland i bogen med sammen titel. Bogen er en science fiction roman fra 1884. I denne version af Flatland er mændene polygoner eller cirkler, mens kvinderne er nåle. Hvordan kender man forskel på en mand eller en kvinde i dette univers? I Abbotts udgave af Flatland er der regler for det sociale liv (som selvfølgelig afspejler problemer ved de sociale regler i England omkring 1880). Der er også besøg i landet med en dimension mindre, Lineland, og der kommer besøg fra landet, der har en dimension mere, Spaceland.
Fra Flatland er der mange veje at gå: Geometrien på en kugle, Gauss' forsøg på ved måling at afgør, om vi lever i et krumt rum. Kants er kendelsesformer, hvor det apriorisk ligger fast, at vi lever i et euklidisk rum, den hyperbolske geometri, Den frisættende betydning af opdagelsen af de nye geometrier (sfærisk, hyperbolsk og mange flere) omkring 1850 (HC Hansen:), Rudy Rucker: Den fjerde dimension.

Niveau: A, B.

Timeforbrug: Det er svært at sætte et præcist antal timer på. Det hele afhænger af, hvor meget man vil tage med, bl.a. om man vil læse hele Abbotts bog eller kun uddrag. Så forbruget kan være alt fra 5 moduler á 95 minutter til 12 sådanne moduler.

Samarbejdsmuligheder: Kunne være et forløb i Almen studieforberedelse. Mulige samarbejdspartnere: Engelsk.

Undervisningsmateriale:
1)Edwin A. Abbott: *Flatland*, Penguine Books 1987, Classic Science Fiction, Skrevet 1884 (Humor, stire, logic, all combined in a brilliantly entertaining classic of the forth dimension)
2)Rudy Rucker: *The fourth dimension*, Houghton Mifflin Company Paprback, 1984
3)Stewart, I. : *Flatterland – Like Flatland Only More So*, (2001).
4)Davis, P. J. & Hersh, R. : *The Mathematical Experience,* (1981), s. 400-406.
5)Lewis Caroll: *Alice in Wonderland*
http://etext.lib.virginia.edu/toc/modeng/public/CarAlic.html
http://falcon.jmu.edu/~ramseyil/carroll.htm
Lewis Caroll Homepage: http://www.lewiscarroll.org/carroll.html
6)R.Newman: *The world oif Mathematics*, Vol.4, p2375-2386, Lewis Caroll and What the Tortoise Sad to Achilles and Other riddles.
7)http://www.eldritchpress.org/eaa/FL.HTM
8)http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/

Eksempel 280:
Sammenligning af to måleserier
- et eksempel på et forløb indenfor emnet statistik

'Sammenligning af to måleserier' er et eksperimentelt projekt, der handler om deskriptiv statistik udbygget med en simpel hypotesetest. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale, fx en undersøgelse af elevernes reaktionstider. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis. Herunder bør man diskutere middelværdi og median, samt diskutere deres fordele og ulemper. Denne første del er rent deskriptiv og kan fx munde ud i kåringen af klassens hurtigste elev. I projektets anden del skal klassen sammenligne to måleserier, fx for at afgøre om der er forskel på piger og drenges reaktionstid. Klassen diskuterer i fællesskab mulige teststørrelser, og der vælges en bestemt teststørrelse, fx forskellen mellem medianerne for de to grupper. Scramblings-metoden introduceres, fx via et historisk datamateriale, hvorefter måleserierne scrambles og man finder eksperimentelt fordelingen for teststørrelsen. Dette kan med fordel først gøres i hånden (hvor man samler klassens resultater, idet hver elev fx håndscrambler 4 gange ved at blander kort med de observerede værdier) og derefter på maskine. Derefter diskuteres det i fællesskab om den observerede forskel er rimeligt sandsynlig eller højst usandsynlig (eller midt imellem), og hvad konklusionen bliver.

Mål: at tilgodese kravet om at eleverne skal kunne arbejde med – simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, simple empiriske statistiske deskriptorer.

Niveau: Projektet egner sig til grundforløbet. Der er muligheder for senere at vende tilbage til eksperimentet på de højere niveauer i forbindelse med mere avancerede overvejelser om hypotesetest med baggrund i teoretisk sandsynlighedsregning. Fx kan scramblings-metoden sammenlignes med kanoniske tests som det parametriske t-test eller det ikke-parametriske Mann-Witney test.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse og test af datasæt.

Arbejdsformer og timeforbrug: 6×45 minutter
Eksperimentet med den deskriptive del tager typisk en dobbelttime, men kan sagtens udvides med en mere generel undersøgelse af fx middelværdien og medianen. Hypotesetesten kræver tilsvarende som minimum en dobbelttime med introduktion af scramblingsmetoden, samt elevernes gennemgang af deres egne måleserier. Dertil kommer efterbehandlingen af elevernes resultater.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at skrive rapport om såvel eksperiment som hypotesetest med brug af det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel, statistik- og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. Det er ikke alle programmer, der er født med en scramblings-kommando (der kan udføre en tilfældig permutation af en liste), men de kan udvides med små programmer, der klarer denne del af sagen. Grafiske lommeregnere kan glimrende bruges til den deskriptive del, men vil være for langsom til omfattende realistiske scramblinger.

Undervisningsmaterialer: Eksperimentet om reaktionstid med tilhørende elevinstruktion er beskrevet i detaljer i hæftet 'Hvem er den hurtigste'. Et tilsvarende historisk eksempel er gennemgået i hæftet: 'Challenger ulykken'. Der er tale om lærermaterialer med diskussion af begreber og metoder.

Man kan efter behov supplere med noter om elementær deskriptiv statistik omhandlende medianer, kvartiler, boksplots mm.

Eksempel 282:
Random Walk
- et eksempel på et forløb indenfor emnet sandsynlighedsregning/statistik

'Random Walk' er et længerevarende eksperimentelt baseret forløb, der handler om tilfældighed og sandsynligheder. Random walk i én dimension fungerer som prototypen på en sum af tilfældigt varierende størrelser og kan opfattes som en let tilgængelig diskret udgave af normalfordelingen. Der arbejdes både med konkrete simuleringer (møntkast) og computersimuleringer af en random walk. Der arbejdes tilsvarende med den teoretiske standardmodel for en random walk i form af et binært træ med tilhørende ideelle hyppigheder/sandsynligheder og sammenhængen mellem de ideelle hyppigheder/sandsynligheder og Pascals trekant. På basis af eksperimenter og modeller for en random walk opdages/udledes reglerne for forventningsværdi og spredning samt de karakteristiske sandsynligheder hørende til de forskellige typer af udfald: Normale udfald og exceptionelle udfald. Forløbet afrundes naturligt med udførslen af en random walk test, fx en smagstest.

Mål: at bidrage til det supplerende stof med kravet om anvendelse af mindst to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller, samt indsamling og bearbejdning af data til belysning af en opstillet hypotese.

Niveau:
Projektet egner sig til MatB og MatA. Der er mange muligheder for passende generaliseringer til fx binomialfordelingen med de tilhørende test i binomialfordelinger eller til den kontinuerte normalfordeling med de dertil hørende forskellige former for test i normalfordelinger.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et samarbejde med fx et naturvidenskabeligt fag omkring opførslen af stokastiske variable og test af simple sammenhænge. Forløbet kan også suppleres med et tværfagligt tema i samarbejde med dansk om brugen af matematiske metaforer i litteratur.

Arbejdsformer og timeforbrug: 15×45 *minutter*
Der veksles mellem konkrete eksperimenter med fx møntkast, simuleringer med brug af grafisk lommeregner eller statistikprogram på computer, regneøvelser og sammenfatning af de eksperimentelt baserede indsigter.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at bruge det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel, statistik- og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. De understøtter alle simuleringer af Random walk, regning med binomialkoefficienter osv. Ligeledes kan enhver grafisk lommeregner bruges til at simulere random walks, regne med binomialkoefficienter osv.

Undervisningsmaterialer: Undervisningsforløbet om random walk findes i hæftet 'Tilfældighedens natur – naturens tilfældighed'. Undervisningsforløbet kan baseres udelukkende på dette hæfte. Et supplerende eksempel på anvendelsen af random walk som en litterær metafor kan man finde i ungdomsbogen 'Tusind kugler' af den svenske forfatter Peter Pohl. Eksperimenter med simuleringer af kuglebaner i et Galtonbrædt er gennemgået i hæftet: 'Tusind kugler'. Der er tale om et lærermateriale i tilknytning til den førnævnte bog af Peter Pohl med eksempler på afprøvning af forskellige matematiske påstande fremført i bogen. Elevinstruktionerne til disse eksperimenter med tilhørende citater fra bogen er inkluderet i dette hæfte.

Eksempel 283:
Kan man smage forskel?
- et samarbejde mellem matematik og biologi

Emnet:
Hypotesetests er et emne, der kan være svært at forstå for eleverne, hvis ikke der gives en hel masse eksempler. Med de moderne CAS værktøjer forsvinder det beregningsmæssige arbejde, og eleverne kan i stedet koncentrere sig om at jonglere med for eksempel hypotese, P-værdi og signifikansniveau.

Niveau:
Matematik A-niveau og Matematik B-niveau.

Samarbejdsmuligheder:
Biologi C-, B- eller A-niveau. Der findes eksempler indenfor kernestoffet på alle tre niveauer.

Timeforbrug:
Eleverne skal på forhånd have stiftet bekendtskab med sandsynlighedsregning og have lavet nogle øvelser i biologi. Hypotesetests med eksempler: 15 timer.

Forløb og arbejdsformer:
I den indledende del af forløbet vil lærerstyret gennemgang af begreberne være fordelagtigt. Senere i forløbet bør eleverne arbejde i grupper. Man kunne fx starte med at anvende og diskutere en såkaldt *triangel-test*. Med denne svares på spørgsmål som: Er det muligt at smage forskel på Carlsberg og Tuborg, eller to forskellige cola-typer. Denne test er meget brugt ved levnedsmiddelundersøgelser.
Hver deltager får udleveret tre kodede prøver, hvoraf to er ens og en er forskellig fra de andre (dvs. to glas med det ene og ét glas med det andet. Efter at have smagt på prøverne skal hver person udpege den prøve, der er forskellig fra de to andre prøver.
Eksperimentet kan beskrives med en *binomial*-model, hvor der indføres en stokastisk variabel X, som angiver antal rigtige svar. Vi antager, at X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynligheds-parameter p, og opstiller den *hypotese*, at der ingen forskel er på de to produkter, dvs. at sandsynlighedsparameteren p i binomialfordelingen er $\frac{1}{3}$.
Kan vi på basis af vore observationer tro på hypotesen? Eller: vil vi acceptere eller forkaste hypotesen.
Hvis hypotesen skulle være sand, ville vi forvente en observeret værdi af X på $n \cdot \frac{1}{3}$.
Vi vil forsøge at afgøre, om den observerede værdi af X ser sandsynlig ud i dette lys.
Dette gøres ved at finde *p-værdien* eller *testsandsynligheden*, der angiver sandsynligheden for at observere noget, der er mere eller lige så "ekstremt" som det, vi rent faktisk observerede, under forudsætning af, at hypotesen er sand.
Hvis *p-værdien* er lille, tror vi ikke på hypotesen. Hypotesen forkastes.
Hvis *p-værdien* er stor, tror vi på hypotesen. Hypotesen accepteres.
Grænsen sættes typisk ved 0,05 = 5%.
Et kort forløb kan afsluttes med elevundersøgelse af tilsvarende fænomener, hvor de selv formulerer spørgsmål og opstiller hypoteser.
I et længere forløb kan man vælge at fordybe sig yderligere i hypotesetest og inddrage eksperimentelle metoder.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:
Grafregneren eller CAS-værktøjer benyttes til beregning af løsningerne. Excel kan med lidt øvelse lave test. FATHOM er et godt program, der både laver de statistiske tests og grafer, og tillader eleverne at simulere tusinder af observationer, så de grafisk kan se, hvor deres eget forsøgsresultat ligger i forhold til helt tilfældige observationer. Det giver en god fornemmelse for begrebet signifikansniveau.

Undervisningsmaterialer:
Inspiration kan hentes i materialet: *Hypotesetests i biologi*, samt *Kan man smage forskel – et eksempel på triangeltest* på matematiks hjemmeside på fagets side på emu'en.

Eksempel 293:
Vækstmodeller og differentialregning

Forløbet samler vækst og differentialregning. Det forudsætter, at klassen/holdet har gennemarbejdet forskellige typer af funktioner og differentialregning.

Mål
Målet er at give eleverne/kursisterne en opsamlende og sammenhængende forståelse for vækst og dermed differentialregning.

Niveau
Forløbet er for B-niveau på hf og i gymnasiet.

Samarbejdsmuligheder
Forløbet vil ved at inkorporere relevante eksempler kunne gennemføres i samarbejde med naturvidenskabelige fag eller med samfundsfag.

Arbejdsformer
Forløbet gennemføres som projekt- eller emneforløb med gruppearbejde og afsluttende med en rapport.

Timeforbrug
Timeforbruget i matematik vil være ca. 4 klokketimer.

Indhold
Vækstmodeller:
1. Beskriv, hvordan differentialkvotienter kan anvendes til at beskrive karakteristiske træk ved væksttyperne omtalt nedenfor.
2. Hvad kan man slutte om en funktion og om det grafiske forløb ud fra kendskab til den afledede funktion? Opstil selv nogle forskellige antagelser om den afledede og prøv at ræsonnere dig til egenskaber ved funktionen.
Lineær vækst
Eksempel
I perioden 1991 – 2002 kan antallet af dankortbetalinger i Danmark med god tilnærmelse beskrives ved hjælp af funktionen $f(x) = 33x + 109$, hvor *x* er antal år efter 1991, mens *f(x)* beskriver antal af dankortbetalinger i millioner.
(Kilde: Eksamensopgave hf fællesfag aug. 2004)
Eksponentiel vækst
Eksempel
Koncentrationen af en type medicin i blodet hos en patient kan beskrives ved funktionen $f(x) = 11{,}5 \cdot 0{,}8453^x$, hvor *x* er antal timer efter indsprøjtning, og *f(x)* er koncentrationen af medicinen i blodet i milligram pr. liter.
(Kilde: Eksamensopgave hf fællesfag aug. 2002)
Potensvækst
Eksempel
Antallet arter af krybdyr kan i et område beskrives ved funktionen $f(x) = 3 \cdot x^{0{,}305}$, hvor *x* står for kvadratkilometer, og *f(x)* står for antal arter af krybdyr.

Logistisk vækst
Eksempel

Salget af en modevare i Europa kan beskrives ved funktionen $f(t)=\dfrac{160}{1+180.000\cdot e^{-0,8t}}$, hvor t er antal måneder efter varen er kommet i handlen, mens *f(t)* er antal solgte varer i tusinder.

Eksempel 294:
Matematiske modeller og SD-diagrammer

SD-diagramteknikken (System Dynamics) opstod i forbindelse med udarbejdelsen af den model, der ligger til grund for ”Grænser for vækst” og er en simpel måde at opstille et grafisk diagram til illustration af sammenhænge i et dynamisk system. Når diagrammet først er opstillet, kan man meget nemt udarbejde et regneark, der løser modellen efter Eulers metode, og viser løsningerne som grafer af modellens variable. Her kan man variere indgående konstanters værdi og straks se ændringerne grafisk. Man kan også vælge at opstille de differentialligninger, der beskriver modellen, ud fra diagrammet, og så eksempelvis anvende CAS-værktøjer til at løse disse. Selve SD-diagramteknikken er så enkel, at den nemt kan tilpasses matematikundervisningen på alle niveauer.

Mål: - kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger
- differentialligningsmodeller, herunder både opstilling, anvendelse og løsning af differentialligninger
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Nivaeu: Meget velegnet på A-niveau til introduktion af differentialligningsmodeller og på B-niveau som introduktion til fortolkning af differentialkvotient og opstilling af modeller med differentialligninger,

Samarbejdsmuligheder: Forløbet kan afvikles i et samarbejde med andre naturvidenskabelige fag, der benytter dynamiskes modeller. Fx radioaktive isotoper i fysik, modeller for økosystemer i biologi , fx fiskerimodeller, modeller for befolkningsudvikling og levevilkår i samarbejde med naturgeografi og samfundsfag, modeller for grundvandsstrømninger i samarbejde med geografi, reaktionskinetik i kemi.

Arbejdsformer og timeforbrug: Arbejdet med SD-diagrammer lægger op til, at eleverne selv arbejder med forskellige simple modeller først inden de kastes ud i større modelopbygninger. Herved trænes de at udvælge relevante variable til beskrivelse af det fænomen, der modelleres. Dette udtrykkes i de såkaldte ”kasser” i SD-diagrammerne. Flow’et mellem de forskellige kasser indføres i modellen som ”strømningspile” og flowhastigheden præsenteres af de såkaldte ”haner” i diagrammet. Modellens grænseflade til omgivelserne præsenteres af ”skyer” og endeligt indføjes sammenhænge mellem de forskellige størrelser. Dette introduceres i et konkret eksempel og eleverne arbejder så med at opstille modeller selv enten over selvvalgte fænomener eller fænomener, som læreren har udvalgt. Det kunne være: spredning af en sygdom, radioaktive henfaldskæder, udvikling af en population bestående af tre aldersklasser: børn, fertile voksne, voksne over den fertile alder, rygtespredning, økosystemer med rovdyr og byttedyr, modeller for vækst af et dyr (vækstmodeller for fisk). Når modellerne og opstillet i SD-diagrammer overføres de til regneark/CAS-værktøjer og løses. Forløbet kan i matematik afsluttes med at eleverne fremlægger deres model og resultater og samtidig forholder sig kritisk til modellens begrænsninger.

Anvendelse af værktøjsprogrammer: Anvendelse af regneark og CAS-værktøjer er nødvendigt.

Undervisningsmaterialer: Der er flere gode introduktioner til SD-diagrammer, fx ”Manhattan Projektet” (Munksgaard 1994) hvor diagramteknikken anvendes på radioaktive isotoper, men som udmærket kan bruges til blot at introducere selve SD-symbolikken.

Eksempel 302:
Statistik, formidling og medier
- et samarbejde mellem matematik og dansk, evt. i almen studieforberedelse

Emne:
Bag mange af mediernes informationer ligger statistisk materiale (f.eks. i opinionsundersøgelser, når talen er om trafikofre eller ledighedstal, ja, sågar i vejrudsigten). Hvordan formidles dette materiale i den videnskabelige offentlighed og i den brede offentlighed, og hvad sker i transformationen fra statistik til nyhedsindslag? Har man som udenforstående en chance for at kunne gennemskue om det statistiske argument er lødigt? Hvad får man ud af statistisk materiale? Hvad kan man konkludere? Hvordan kan man formidle et sådant materiale, så man både respekterer de statistiske kendsgerninger og forbehold og de journalistiske krav?

Formål: At sætte fokus på hvorledes man stiller spørgsmål til og henter svar fra et statistisk materiale, samt hvorledes man formidler en viden herom.

Niveau
Forløbet er for både B og C-niveau på hf og i gymnasiet.

Samarbejdsmuligheder
Forløbet vil kunne tilrettelægges i samarbejde med dansk, hvor eleverne/kursisterne i dansk kan formulere mindre artikler undervejs.

Arbejdsformer
Gruppearbejde.

Timeforbrug
Timeforbruget i matematik vil være 3-4 klokketimer. Hertil kommer timer i dansk.

Undervisningsmaterialer
På fagets side på emu'en ligger forslag til konkret opgave. Man kan dog lige så vel hente aktuelt materiale fra medierne, eller lade sig inspirere af materialet om stikprøver på fagets side på emu'en.

Eksempel 305:
Centralperspektiv og værdiperspektiv
- et samarbejde mellem matematik og andre fag i almen studieforberedelse

Et emneforløb om renæssancen kunne sætte fokus på forholdet mellem individ og samfund. Der kunne tages udgangspunkt i den sorte død og forholdet mellem religion og civilsamfund. Eller vægten kunne lægges på at undersøge baggrunden for de norditalienske bystaters opblomstring og for de nye forestillinger om ”den gode og den dårlige regering”. Hovedparten af emneforløbet skulle anvendes til at undersøge spørgsmål som: Hvilken rolle spillede genopdagelsen af antikken og den gryende videnskabelige selvbevidsthed for den kunstneriske udvikling fra værdiperspektiv til centralperspektiv? Hvordan malede man i middelalderen? Hvad prøvede man at fremstille? Hvorfor begyndte ønsket om at gengive det, man ser? Hvilken rolle spillede religionen? Hvordan nåede man frem til en ny malestil, hvorefter det at male i højere grad kom til at handle om at se? Hvilke regler er der for perspektivtegning? At se er også at undersøge verden? Er det naturvidenskab at male? Hvilken rolle spillede ændringen i malekunsten i overgangen fra Aristoteles' verdensbillede til Newtons? Der kunne i emneforløbet arbejdes med billedanalyser, læses primærtekster, ligesom en studietur naturligt kunne indgå.

Deltagende fag kunne være:
Matematik, dansk, billedkunst, religion, italiensk, samfundsfag, historie, oldtidskundskab.

Indhold i matematik:
Et forløb om perspektivgeometri. Evt. med inddragelse af læsning af sider fra Albertis eller andre klassiske fremstillinger af reglerne for at tegne perspektivisk.

Arbejdsformer:
Efter en introduktion fra de deltagende fag arbejdes med projekter. De deltagende fag laver fælles oplæg hertil.

Eksempel 307:
Billedanalyse
- et projekt i samarbejde med fx dansk, tysk og engelsk

Niveau: 1g : B-niveau
Tidsforbrug: 8 moduler á 90 minutter

I. Matematik: Perspektivtegning. Materiale:
http://www.ci.kk.dk/skoler/ng/teachers/FC/homepageflemming/index.htm
Problemformulering I: Hvordan konstruerer man en terning og et hus perspektivisk? Hvordan halverer man et linjestykke og en vinkel perspektivisk?
Gruppedannelse: Dannet af læreren
Arbejdet i grupperne: Gruppens beslutninger, herunder lektier nedfældes på et logbogsblad og afleveres efter modulet. HUSK: Der er lektier til hver gang.
Start timen med at gennemgå lektierne og spørgsmål til dem. Individuelle arbejdsopgaver gennemgås for de øvrige i gruppen.

Produktkrav: Rapport
Krav til rapporten:
1 Hvert gruppemedlem skal bidrage med en underskrevet del. Alle i gruppen skal være inde i det stof gruppen som helhed har arbejdet med.
2 Der skal være en præcis litteraturliste over anvendt materiale, herunder de sider, som hører med til gruppens pensum inden for projektopgaven.
3 Der skal være tydelig kildeangivelse, når en regel, sætning eller påstand anvendes uden bevis eller argumentation.
4 Rapporten skal omfatte en beskrivelse af hver af konstruktionerne samt en begrundelse for, at de er rigtige. Konstruktionerne skal udføres omhyggeligt, og hvert gruppemedlem udfører to konstruktioner, der indgår i rapporten. Konstruktionerne skal tilsammen dække konstruktionerne i problemformuleringen.

II. Besøg på Statens museum for kunst
Hver gruppe analyserer et antal billeder med anvendelse af de forskellige fags analyseredskaber. Som indledning til besøget gennemgår hver lærer en analyse af et maleri, som læreren har valgt – og som måske i særlig grad illustrerer analyseredskaber, som vedkommendes fag har bidraget med.

Problemformulering II: *Hvilken rolle spiller anvendelsen af perspektivtegning eller udeladelsen deraf i analysen af et billede? Hvordan analyserer man et billede?*

Produktkrav II: En rapport over besøget.

Eksempel 313:

Det gyldne snit og Fibonaccitallene

- et samarbejde mellem matematik dansk og evt. andre fag i almen studieforberedelse, med detaljeret beskrivelse af et projektorienteret arbejde.

Samlet omfang: Ca. 20 lektioner i alt.

Uge 1-2: Optakten

Introduktion til det gyldne snit i dansk og matematik (5 lektioner), efterfulgt af følgende:
valg af projekttitel (3 i prioriteret rækkefølge), som danner grundlag for gruppedannelsen. Titler, som kun få eller ingen vælger, falder bort (1 lektion). Lærerne sammensætter grupperne efter de afgivne ønsker.
Gruppesammensætning (3-4 personer pr gruppe) meddeles og arbejdsformen præsenteres bl.a. arbejds- og samarbejdslogbog mv. (1 lektion)
Førsteprojektgruppemøde: Forventninger til samarbejdet. Arbejdsplan udarbejdes – alle har lige stort ansvar for alle dele af produktet. (1-2 lektioner afhængigt af elevernes kendskab til formen)

Uge 3: Projektugen

Projektarbejdet er tilrettelagt med et omfang på 10 lektioner.
I skemaet er der planlagt timer som mulighed for fælles face-to-face tid. Det er valgfrit, om man ønsker at mødes på de angivne tidspunkter.

Obligatorisk midtvejsvejledning

Midt i projektperioden skal hver gruppe konsultere en af lærerne for konstruktiv feedback. Hver gruppe aftaler en tid for ca. 20 min. face-to-face vejledning.
Ønskes vejledning virtuelt (asynkront) kan grupperne over hele perioden skrive et indlæg i det overordnede projektrum herom, og vejlederne vil derefter hurtigst muligt kommentere. Det er naturligvis vigtigt at grupperne præciserer, hvad man ønsker kommenteret og hvor i gruppens projektrum dokumenterne ligger (man kan evt. linke til dokumentet i sit indlæg). Der kan som minimum forventes svar fra dag til dag.
Ønsker grupperne virtuel vejledning synkront via chat kan dette aftales på samme måde.

Produktkrav

Hver gruppe udarbejder et skriftligt materiale svarende til 5-6 sider. Produktformen vælger gruppen selv – det kan være præsentation, hjemmeside, worddokument m.v.
En del af dette produkt skal formidles til resten af klassen i en 20 min. fremlæggelse, hvori alle gruppens medlemmer deltager. Til denne fremlæggelse udarbejder hver gruppe en synopsis på 1 side. Der skal være overvejelser omkring både indhold og form (hvad og hvordan).

Bedømmelse og Afleveringsfrist

Både projektrapporten og synopsis samt fremlæggelse vurderes.
Der gives individuelle karakterer til gruppens medlemmer.
Produkt og synopsis afleveres i afleveringsmappen (der er oprettet en mappe til hver del) i projektrummet senest (deadline angives).

Materialer

På fagets side på emu'en ligger et samlet projektoplæg med forslag til 9 forskellige projekttitler, litteratur samt links.

Eksempel 401:
(For yderligere materiale om eksamen henvises til matematiks side på emu'en på adressen: http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsministeriet/eksamen.html)
Liste over gennemførte forløb. B-niveau. Skabelon

Samspil med andre fag	
1.	
2	
3	
4	
Almen studieforberedelse	
5	
6	
7	
8	
Matematik	
9	
10	
11	
Kursusforløb	
12	
13	
14	

Gennemførte undervisningsforløb (til brug for læreren) B-niveau.												
Forløb →	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Faglige mål 2.1 ↓												
Variable												
Statistik												
f(x) og modellering												
$f'(x)$ og $\int f(x)dx$												
Geometriske modeller												
Ræsonnement og bevisførelse												
Anvendelse af matematik												
Historisk, videnskabelig, kulturel udvikling												
It												
Supplerende stof 2.3												
Ræsonnement og bevis												
Modeller												
Statistiske modeller												
Matematikhistorisk projekt												