BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Vejledning til læreplan i matematik A, stx

August 2024

Vejledning til læreplan i matematik A, stx
August 2024

2024
ISBN nr. [xxx xxx xxx] (web udgave)

Design: Center for Kommunikation og Presse
Denne publikation kan ikke bestilles.
Der henvises til webudgaven.

Publikationen kan hentes på:
www.uvm.dk
Børne- og Undervisningsministeriet
Departementet
Frederiksholms Kanal 21
1220 København K

Indhold

Indledning

Undervisningen i almindelighed reguleres af lov og bekendtgørelse for de gymnasiale uddannelser. De styredokumenter, der særligt bestemmer undervisningen i matematik A, stx, er

- læreplanen,
- denne vejledning til læreplanen,
- formelsamlingen for niveauet,
- vejledende opgavesæt til niveauet samt
- det akkumulerede sæt af eksamensopgaver stillet til ordningen.

Læreplanen udgør en ramme, inden for hvilken lærer og elever kan følge deres interesser og tilpasse undervisningens indhold og tilgange til eleverne og deres studieretning.

Vejledningen præciserer, kommenterer, uddyber og giver anbefalinger vedrørende udvalgte dele af læreplanens tekst, men indfører ikke nye bindende krav.

Læreplan, vejledning og formelsamling kan hentes på www.uvm.dk. Vejledende eksamenssæt og tidligere stillede opgaver for niveauet kan hentes på www.prøvebanken.dk; her kræves uni-login.

Læreplanscitater er sat med kursiv og skrevet med blå tekst.

Denne tekst er første udgave af vejledningen til 2024-læreplanen i matematik på niveauet. Styrelsen vil sætte pris på bidrag til forbedring af teksten i form af kommentarer, påpegning af fejl og mangler og forslag til andre forbedringer eller nye områder, der bør inddrages i teksten. Alle bidrag kan sendes til mailadressen *gymnasial.matematik@stukuvm.dk* og vil blive modtaget med taknemmelighed. Venligst anfør "Kommentarer til vejledning i matematik [A/B/C], [stx/hf]" i mailens emnefelt. Nye versioner af vejledninger udarbejdes normalt en gang årligt med offentliggørelse tidligt i skoleåret.

1 Identitet og formål

1.1 Identitet

Matematik omhandler resultatet af menneskers udvikling af generelle teorier om abstrakte strukturer med udgangspunkt i antal, form og forandring, inspireret af observationer i natur, samfund eller matematikken selv.

Matematik tilvejebringer et universelt sprog, begrebsapparat og metodesæt, der er uundværligt i beskrivelse og analyse af sammenhænge og struktur i naturvidenskab, teknologi og samfundsvidenskab, og i samspillet sker en gensidig udvikling af fagenes indhold og metoder. Faget er et dynamisk, kumulativt og deduktivt fag i stadig udvikling fra oldtiden til i dag, båret af menneskelig nysgerrighed og kreativitet, ofte i en vekselvirkning mellem anvendelse og teoribygning.

Fagets identitet er beskrevet ens i læreplanerne for matematik på stx og hf.

En ministeriel kommission nedsat i 2016 i forbindelse med gymnasiereformen samme år analyserede udfordringer og gav anbefalinger om undervisningen i matematik i de gymnasiale uddannelser. Kommissionen anbefaler i sin afrapportering[1] tre gennemgående fokuspunkter for fremtidige læreplaner i matematik:

- **Robusthed** i elevernes omgang med faget og træning i basale færdigheder[2].
- **Samspil**, dvs. matematik "på tværs" af anvendelsesfelter og centrale fag – altså matematik med en ekstern orientering.
- **Progression**, hvormed menes indsigt internt i matematikkens sammenhænge og den logisk opbyggede, kumulative struktur.

Undervisningsfaget matematik på stx er ifølge Lov om de gymnasiale uddannelser nært forbundet med videnskabsfaget matematik, og på alle niveauer genfindes centrale træk ved videnskabens fagsprog, begrebsapparat og metodesæt i de faglige mål og kernestoffet. Det gælder eksempelvis symbolbrug, logik, den formelle opbygning af matematisk teori med definition, sætning og bevis. Det afspejler kommissionens anbefaling af "progression": faglig indsigt internt i matematikken.

Matematikkommissionen anbefaler tillige, at der på alle niveauer skal være et indhold af matematik med henblik på anvendelser: fagligt "samspil". Meget af videnskabsfagets teori har et anvendelsesperspektiv, og det skal afspejle sig i undervisningen. Sigtet med faget matematik i de gymnasiale uddannelser er altså bredere end videnskabsfagets sigte. Matematik sættes som fag ind i en bredere almendannende ramme, som åbner faget mod livet uden for skolen, såvel som mod skolens andre fag og aktiviteter.

Arbejdsmetoder og tankegange fra videnskabsfaget optræder altså i undervisningen, men står ikke alene. Undervisningen i begreber og teorier må formidles i en sammenhæng, som eleverne kan opleve som relevant, og som giver dem mulighed for at reflektere over den opnåede viden og erkendelse, og som samtidigt viser dem, hvordan videnskabsfaget matematik er opstået, udviklet og kan anvendes.

[1] Matematikkommissionen: "Afrapportering", Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling (2016)

[2] Begrebet er nærmere udfoldet i kommissionens afrapportering s. 41

Anvendelsesorientering og modellering på den ene side og teoriopbygning på den anden side fungerer i et vekselspil. Anvendelserne kan inspirere til, give relevant træning af og for mange elever legitimere og motivere arbejdet med teorien, og arbejdet med teorien giver et samlende overblik og et blik for fællestræk i de problemstillinger fra omverden, der behandles med matematik.

Endelig omtaler kommissionsrapporten faglig "robusthed" i elevernes omgang med faget og træning af basale færdigheder. Det betyder ikke blot sikkerhed i brøkregning eller differentiationsregler, men også at på hvert niveau må grundlæggende begreber som fx 'funktionsbegrebet' eller 'differentialregning' og elementer af teorien indarbejdes og trænes så tilpas, at de kan aktiveres uproblematisk i anvendelsessammenhænge og ved tilegnelsen af ny teori. Robusthed indebærer tillige, at sådanne begreber, teori og færdigheder vedligeholdes med respekt for den tidligere behandling.

1.2 Formål

Formelt set er fagets formål, som det er for alle fag, at bidrage til at løse den uddannelsesmæssige opgave, der fremgår af gymnasielovens formål med uddannelsen (kapitel 1). For matematik er der (på nær niveauangivelsen) enslydende formål:

Faget matematik på A-niveau giver eleverne fortrolighed med et matematisk sprog og et bredt sæt af begreber, teorier og metoder, der bidrager til deres almendannelse, og som kan være grundlag for videre uddannelse med et væsentligt indhold af matematik. Elevernes arbejde med matematik medvirker til at udbygge deres grundlag for at deltage aktivt i et demokratisk samfund.

Gennem arbejdet med faget opnår eleverne kompetencer i matematik, så de kan formulere, gennemføre og formidle matematiske ræsonnementer inden for en bred emnekreds samt beskrive fagets deduktive og kumulative opbygning. Eleverne bliver i stand til at formulere, analysere og behandle problemstillinger i relation til deres omverden, andre fag og faget selv. Endelig får de fortrolighed med matematiske modeller som middel til at beskrive fænomener inden for naturvidenskab, teknologi og samfundsvidenskab.

Teksten ovenfor forklarer, på hvilken måde faget på dette niveau bidrager til at løfte uddannelsens formål, sådan som det er anført i Lov om de gymnasiale uddannelser, §1, §2 stk. 2 og §5.

Sigtet med undervisningen er altså dels, at eleverne bliver i stand til at forstå og arbejde med faget matematik, dels at bruge den viden, de metoder og de tænkemåder, der er karakteristiske for matematikken som et middel til at beskrive og forstå verden, så de bliver i stand til at fungere og handle som vidende borgere i dagens og fremtidens globale samfund. I sit hele giver undervisningen eleverne et oplyst grundlag for deres studievalg og forbereder dem til studier, hvor matematik er et centralt fag.

2 Faglige mål og fagligt indhold

2.1 Faglige mål

De faglige mål beskriver centrale studieforberedende og almendannende kompetencer for matematik på A-niveau og udgør grundlaget for den afsluttende evaluering. De er derfor pejlemærker for de enkelte undervisningsforløb, som sammen med den nødvendige faglige og pædagogiske progression skal sætte eleverne i stand til at nå disse slutmål.

Eleverne skal kunne redegøre for et bredt udvalg af matematiske begreber, teorier og metoder samt kunne anvende dem i problemløsning og modellering.

De matematiske begreber, teorier og metoder er det faglige grundlag for opbygningen af matematik som fag og for anvendelsen såvel inden for faget som i andre sammenhænge. Redegørelse betyder i denne sammenhæng, at eleverne skal kunne forklare, hvorfor og hvordan bestemte begreber, teorier eller metoder finder anvendelse i en konkret situation, og de skal kunne bruge dem til problemløsning og modellering, såvel inden for matematik som i forbindelse med matematiks anvendelse i andre fag.

Eleverne skal kunne følge og gennemføre matematiske ræsonnementer og beviser og derigennem demonstrere viden om opbygningen af matematisk teori.

Eleverne skal kende den deduktive opbygning af matematisk teori i form af definitioner, sætninger og beviser, herunder hvordan matematiske sætninger består af præmis og påstand. De skal på det grundlag mundtligt kunne gennemføre ræsonnementer og beviser, støttet af tekster, grafer og figurer. Eleverne skal som hovedregel i matematik A-forløbet møde matematiske argumenter for alle faglige påstande, jf. i øvrigt omtalen nedenfor i afsnit 2.2. Kernestof og afsnit 3.1. Didaktiske principper.

Eleverne skal kunne forstå og anvende matematisk symbol- og formelsprog.

Matematisk tekst er kendetegnet ved en udstrakt brug af symboler og formler. Eleverne skal derfor kunne læse symbol- og formelsprog, så de er i stand til at forstå og anvende det selv såvel mundtligt som skriftligt i kommunikation om matematiske forhold, også når de forekommer i andre fag. Se i øvrigt en nærmere omtale nedenfor i afsnit 2.2. Kernestof.

Bagest i formelsamlingen for matematik A findes en liste over matematiske standardsymboler, som ud over at give eleverne et overblik også kan bidrage til, at undervisere og forfattere af undervisningsmaterialer kan anvende ensartet notation, symbolsprog og terminologi.

Eleverne skal kunne vælge, benytte og oversætte mellem repræsentationer af matematiske objekter.

Matematisk præget information optræder i mange forskellige repræsentationer i fagets egen kommunikation, når matematik anvendes i andre fag eller i omverdenens brug af matematik. Det er derfor en central færdighed, at eleverne er i stand til at omgås forskellige repræsentationer, i første række

- Repræsentation af sammenhænge udtrykt ved fx funktioner, grafer, datasæt eller ligninger
- Samspillet mellem en funktion og dens afledede fx i forbindelse med modellering gennem en forskrift for f' eller sproglig beskrivelse af vækstхastighed
- Geometriske modeller i form af fx tegninger, ligninger eller parameterfremstillinger

- Beskrivelse af stokastiske fænomener i form af fx observationsdata, diagrammer, sproglig beskrivelse eller sandsynlighedsteoretisk model.

Eleverne skal kunne anvende digitale værktøjer til modellering og matematisk problemløsning.

Digitale værktøjer indgår naturligt i mange faglige sammenhænge som fagets værktøj, fx ved regression, graftegninger eller beregninger i stedet for tabelopslag.

Anvendelsen af digitale værktøjer gør det muligt at udvide spillerummet for elevernes arbejde med modellering og matematisk problemløsning ud over det, som de kan klare ved "håndkraft". Elevernes brug af digitale værktøjer til modellering og matematisk problemløsning prøves i den skriftlige prøves delprøve 2.

Brug af digitale værktøjer kan også i visse sammenhænge give andre didaktiske muligheder og dermed udvikle elevernes muligheder for faglig udforskning og fordybelse efter lærerens valg, jf. afsnit 3.1.

Eleverne skal kunne benytte matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for faget selv eller andre fagområder og i relation til omverdenen.

Dette faglige mål påpeger, at matematik indgår i studieretningsprojektet, herunder i det studieretningsprojektforberedende forløb, som institutionen tilrettelægger for eleverne. Elever kan skrive studieretningsprojekt flerfagligt eller, dersom det valgte område og den faglige problemstilling egner sig bedst til et enkeltfagligt projekt, i matematik alene.

Det faglige mål giver afsæt for flerfagligt samarbejde, herunder arbejde med anvendelsesorientering. Eleverne skal lære, hvad matematik som fag kan bidrage med i flerfaglige sammenhænge. Det flerfaglige arbejde er god anledning til også at arbejde med matematisk symbol- og formelsprog som led i en formulering, analyse og løsning af problemer, og analysen af problemer må ske med anvendelse af et bredt udvalg af begreber, teorier og metoder.

Eleverne skal kunne opstille, bearbejde og fortolke matematiske modeller til beskrivelse af fænomener inden for forskellige fagområder samt diskutere modellers anvendelse og rækkevidde.

Som omtalt i afsnittet om fagets identitet fordrer Matematikkommissionen i sin afrapportering, at der på alle niveauer af matematik arbejdes med bl.a. fagligt samspil, herunder arbejde med matematisk modellering af andre problemstillinger med afsæt i andre fag eller omverdensfænomener.

Det er en del af arbejdet med fortolkning af en model at diskutere modellens anvendelse og rækkevidde. Det er også relevant at diskutere den forenkling, der ligger i modellens beskrivelse af omverden, herunder hvordan en stadig mere raffineret modellering skridt for skridt kan raffinere og præcisere modelleringen. Et eksempel kan her fx være modellering af frit fald i tyngdefeltet, først alene med tyngdekraften, derefter i successivt mere komplekse modeller en inddragelse af forhold om luftmodstand.

Derudover er der mange aspekter af modellering, der kan inddrages, hvor det vurderes relevant.
Det kan fx også være relevant at diskutere forskelle mellem anvendelse af en model til interpolation og ekstrapolation. Skjulte eller konfunderede variable, hvor to variable ser ud til at være direkte afhængige, men i virkeligheden begge er afhængige af en fælles tredje variabel (ofte tiden) kan diskuteres. Systematiske fejl og usikkerhed i modellens beskrivelse af omverden kan inddrages.

Modelleringskompetencen indgår i begge delprøver ved den afsluttende skriftlige prøve, og specielt i delprøve 2, hvor konkrete matematiske modeller af omverdensfænomener undersøges.

Eleverne skal kunne læse og bearbejde tekster med matematikfagligt indhold.

Det fortættede, formeltunge sprog, matematisk indsigt formidles i, er en selvstændig barriere i tilegnelsen af fagligt materiale i matematik. Det er derfor et særskilt fagligt mål, at eleverne opnår kompetence i selvstændigt at tilegne sig matematisk tekst. Det vil de ofte have svært ved med lærebogstekst, der er kompakt formuleret. I afsnit 3.1. Didaktiske principper uddybes krav til undervisningen med henblik på, at eleverne får mulighed for at opfylde dette faglige mål.

Eleverne skal kunne formidle emner med matematikfagligt indhold mundtligt og skriftligt.

I det skriftlige arbejde skal eleverne først og fremmest beherske præcis, fyldestgørende og fagligt korrekt formidling af problemløsning. Denne genre kan imidlertid ikke stå alene. Eleverne skal derudover stifte bekendtskab med andre former for skriftlig formidling af et matematisk indhold, eksempelvis formidling af resultatet af et modelleringsarbejde eller af samarbejdet med andre fag. Tekstbegrebet skal her opfattes i den udvidede forstand, som også omfatter brug af andre medier end skrift, eksempelvis vodcasts. Det er især i forbindelse med formidling af andet end simpel problemløsning afgørende at være opmærksom på målgruppen. Eleverne skal herunder lære at være opmærksomme på, at formidlingen må ske på modtagerens præmisser, og at dette forhold må indgå i tilrettelæggelsen af formidlingens indhold og form.

Den mundtlige formidling er især rettet mod det fagligt interne med fokus på at gennemføre matematisk argumentation med inddragelse af relevante definitioner, sætninger og beviser. Derudover er der også situationer, hvor matematisk begrundet indsigt ud fra modellering i andre faglige sammenhænge formidles til en valgt målgruppe.

Arbejdet med formidlingsaspektet understøtter desuden udviklingen af elevernes skriftlige kompetencer og almene studiekompetencer, fordi der lægges vægt på faglig præcision og argumentation.

Eleverne skal kunne perspektivere matematik gennem eksempler med udgangspunkt i matematikkens historie eller gennem inddragelse af aspekter af videnskab, teknologi, samfund eller kultur.

Perspektivering indebærer, at der inddrages forhold uden for matematikken. Det kan fx være erfaringer og viden fra andre fag eller fra samfundsdebatten. Det er ikke tanken, at eleverne skal kunne perspektivere enhver faglig problemstilling, men de skal på eksempelbasis kunne inddrage perspektiver og derigennem kunne se matematik i en bredere sammenhæng. Perspektiveringen kan ske som led i samspil med andre fag. Matematikkens historie spiller en særlig rolle i perspektiveringen, dels fordi den er med til at vise fagets forbindelse til samfundets udvikling gennem årtusinder, dels fordi det understreger, at matematik er et vidensområde udviklet/opdaget af mennesker, og som er et fag i fortsat udvikling.

Eleverne skal kunne undersøge problemstillinger og udvikle og vurdere løsninger, hvor fagets viden og metoder anvendes.

Matematik kan indgå med et innovativt element i flerfagligt samarbejde, i de studieretningsprojektforberedende forløb og i elevens afsluttende studieretningsprojekt.

Elevernes evne til at undersøge problemstillinger og udvikle og vurdere løsninger, hvor fagets viden og metoder anvendes, opbygges navnlig gennem arbejde med modellering.

Eleverne skal kunne demonstrere viden om fagets identitet og metoder.

Fagets identitet er beskrevet i 1.1. Identitet. Eleverne kan demonstrere deres viden om matematiks identitet og metoder, når de forklarer opbygningen af konkret, matematisk teori, eller når de i forbindelse med modellering viser kendskab til samspillet mellem matematik og andre fag i en konkret modelleringssituation.

Der skal være en klar progression i arbejdet med fagets identitet og metoder. Det anbefales at lade fagets identitet og metoder indgå som en integreret del af de enkeltfaglige og flerfaglige forløb, og det er ikke tanken, at der skal tilrettelægges længere generelle forløb om matematiks videnskabsteori.

Eleverne skal især kunne bringe deres forståelse af matematiks identitet og metoder i spil i forbindelse med studieretningsprojektet og skal her kunne se forskelle fra og ligheder med andre fag.

2.2 Kernestof

Kernestoffet udgør grundlaget for den skriftlige prøve i Matematik A. Det er nærmere beskrevet i læreplanen og uddybes nedenfor. Når der i tekst refereres til faglige "hovedområder", menes områderne geometri, trigonometri og vektorer, funktioner og infinitesimalregning samt sandsynlighedsregning og statistik omtalt i afsnit 2.2.2-2.2.4 nedenfor.

Det faglige mål vedr. symbol- og formelsprog behandles i forbindelse med gennemgangen af kernestoffet, så eleverne opnår fortrolighed med relevant skrivemåde og terminologi. For enkelte, særlige områder er dette tydeliggjort nedenfor i forbindelse med omtale af kernestoffet.

2.2.1 Tal og algebra

Arbejdet med tal og algebra skal konsolidere grundskolens arbejde med stofområdet, herunder regningsarternes hierarki, brøker og ligningsløsning, så eleverne opnår sikkerhed på disse områder.

Tallene

Mængder og talmængder. Hele, rationale og reelle tal. Regningsarternes hierarki. Algebraisk manipulation. Potens og rod. Ligefrem og omvendt proportionalitet.

Eleverne skal kunne læse og forstå gængs notation fra mængdelæren, så de er i stand til at udnytte mængdeangivelser i forbindelse med fx definitions- og værdimængde, løsningsmængder og hændelser i udfaldsrum. Hertil hører skrivemåde for delmængde, fælles- og foreningsmængde samt komplementærmængde, sådan at udtryk som fx $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $A \cup B = \{7, 8, 9, \dots 20\}$ og $C = [5;\infty[$ giver mening og kan bruges i opgaveløsning. På tilsvarende vis skal eleverne benytte udsagn som fx $0 < x < 12$ og intervaller som løsning til uligheder af typen $f'(x) > 0$.

Eleverne skal kende betegnelserne for talmængderne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ samt forskellige repræsentationer af tal, herunder brøk, decimaltal og eksponentiel notation og omskrivning mellem dem.

I arbejdet med algebraisk symbolmanipulation (bogstavregning) opøves sikkerhed i brøkregning og i at omforme symboludtryk, så eleverne kan følge algebraiske udledninger i arbejdet med den matematiske teori og løse simple opgaver med algebraisk manipulation.

I behandlingen af potenser etc. indgår kvadratsætningerne, kvadratkomplettering, potensregnereglerne, omskrivning mellem potens og rod (det "udvidede potensbegreb") samt enkle omskrivninger af regneudtryk med kvadratrodstegn.

Eleverne skal kende betydningen af den absolutte værdi af et tal, herunder benytte formler, hvor absolut værdi indgår.

Ligefrem og omvendt proportionalitet skal behandles, så eleverne fx kan omsætte en formulering af typen "væksthastigheden er proportional med … " til en differentialligning og "*y* er proportional med *x*" til en formel.

Ligninger

Løsning af ligninger med analytiske, grafiske og digitale metoder.

Eleverne skal kunne løse ligninger med de formler, der indgår på niveauet. I ligningsløsning indgår førstegradsligninger og andengradsligninger, brug af nulreglen samt grundligninger for de nedenfor anførte funktionstyper, dvs. ligninger af formen fx $\cos(v) = 0{,}8$, $\exp(3 \cdot x) = 8$, $5 \cdot 7^x = 570$, $\sqrt{(x+2)} = 9$ og $x^3 = 10$. Eleverne skal kunne løse ligninger ved hjælp af et digitalt værktøj.

Grafisk løsning omfatter løsning såvel "i hånden" som med digitalt værktøj.

Eleverne skal dels kunne arbejde med disse grundligninger i isoleret form, dels kunne genkende og bearbejde dem i situationer, hvor ligningen indgår i en anden sammenhæng. Det kan eksempelvis være ligningsløsning i forbindelse med undersøgelse af monotoniforhold, beregning på kapitalfremskrivning, i forbindelse med en vækstmodel eller ved løsning af et konkret, trigonometrisk problem hentet fra virkeligheden. Ved de skriftlige prøver kan der være såvel "rene" opgaver i ligningsløsning som kontekstopgaver, hvor løsning af opgaven rummer opstilling, løsning og fortolkning af en sådan ligning.

Procent- og rentesregning

Procentregning. Relativ vækst, vækstrate, fremskrivningsfaktor, renteformlen.

Eleverne skal opnå rutine i at løse opgaver, der involverer procentregning med afsæt i fremskrivningsfaktor og vækstrate.

Det er naturligt at afrunde arbejdet med procent- og rentesregning med et samarbejde med fx samfundsfag om privatøkonomi, hvor lån og annuitet kan indgå.

2.2.2 Geometri, trigonometri og vektorer

Arbejdet med geometri og trigonometri skal bygge videre på grundskolens arbejde med stofområdet, herunder kendskabet til trekanter og beregninger heri.

Trigonometri

Trekanter, herunder ensvinklede og retvinklede trekanter. Pythagoras' sætning. Sinus, cosinus og tangens anvendt på retvinklede trekanter. Sinus- og cosinusrelationerne. Beregning af sider, vinkler og areal i vilkårlige trekanter.

Grundlæggende begreber fra geometri, fx areal og omkreds af cirkel samt vinkelhalveringslinje, median, midtnormal og højde i trekanter repeteres i forbindelse med behandlingen af trekanter.

I forbindelse med en generel definition af sin, cos og tan indføres enhedscirklen og radiantal aht. behandlingen af de trigonometriske funktioners egenskaber.

Forstørrelsesfaktor/skalafaktor indføres.

Arealformlen $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$ udledes.

Sinus- og cosinusrelationerne bevises.

Geometri og trigonometri egner sig til problemløsning og indeholder sætninger med beviser, som er velegnede som introduktion til matematisk tankegang og argumentation. Emnet er meget anvendeligt i forbindelse med modellering. Det giver desuden god træning af ligningsløsning med andre ubekendte end x, eksempelvis a, $\cos(A)$ og $\sin(A)$.

Geometri kan bruges som udgangspunkt for arbejde med Euklid og den aksiomatisk-deduktive metode. Det kan anvendes i et samarbejde med dansk eller oldtidskundskab om logik og argumentation. Geometri og trigonometri kan også være et godt udgangspunkt for samarbejde med de kreative fag om fx det gyldne snit.

Analytisk plangeometri

Retvinklet koordinatsystem. Afstand mellem to punkter. Linjens ligning, herunder hældningskoefficient. Skæring mellem linjer, ortogonale linjer. Hældningsvinkel. Afstand mellem punkt og linje. Cirklen, herunder cirklens ligning, skæring mellem linje og cirkel samt tangent til cirkel.

I den analytiske geometri indføres begrebet hældningskoefficient. Det er her tilstrækkeligt at arbejde med linjens ligning på formen $y = a \cdot x + b$. Topunktsformlen for hældningskoefficienten bevises. Det kan indgå i grundforløbet som eksempel på matematisk argumentation.

Analytisk geometri forener geometri og algebra. Emnet kan styrke elevernes færdighed i at skifte mellem forskellige repræsentationer som fx analytiske beskrivelser af geometriske objekter og deres grafiske udtryk. Dele af emnet giver desuden god sammenhæng med dele af emnerne funktioner og vektorer.

På et 3-årigt hold kan dele af den analytiske geometri gennemgås vha. vektorer.

Analytisk geometri kan være et godt udgangspunkt for et matematikhistorisk forløb om Descartes' betydning.

Vektorer i planen og rummet

Koordinatsæt, regning med vektorer, længde, vinkel mellem vektorer, skalarprodukt, projektion. I planen: Determinant, areal af parallelogram, linjens ligning bestemt ved et punkt og en normalvektor, vinkel mellem linjer, parameterfremstilling for linje og cirkel. I rummet: Vektorprodukt, parameterfremstilling for linje i rummet, planens ligning og parameterfremstilling, kuglen samt skæring, afstande og vinkler i rummet.

Vektorer kan indføres som repræsentanter for geometriske objekter eller på basis af koordinater.

Til grundlæggende begreber i vektorregning hører nulvektor, stedvektor, vektor fra et punkt til et andet, vektors længde, enhedsvektor, retningsvektor, tværvektor, normalvektor.

I forbindelse med vektorer i planen gennemgås omskrivning mellem forskellige repræsentationer af linjer og cirkler.

I forbindelse med vektorer i rummet behandles planens ligning og parameterfremstilling samt omskrivning mellem disse, linjens parameterfremstilling og kuglens ligning. Skæring og vinkler mellem linjer, og mellem linje og plan og mellem planer behandles. Afstand mellem punkter og mellem punkt og plan behandles.

2.2.3 Funktioner og infinitesimalregning

Funktioner

Funktionsbegrebet, herunder sammensat funktion. Parallelforskydning af grafer.

Eleverne skal i forbindelse med det løbende arbejde med funktionsbegrebet blive fortrolige med en række forskellige repræsentationsformer og med at skifte mellem dem:

- Definitionsmængde og regneforskrift
- Graf
- Tabel
- Algoritme
- Sproglig definition.

Eleverne skal kunne opstille og fortolke en gaffelforskrift. I den skriftlige prøves delprøve 2 stilles dog ikke opgaver, hvor eksaminanderne med deres digitale værktøj skal producere grafer for funktioner givet ved gaffelforskrift.

Begrebet invers funktion gennemgås ikke systematisk, men behandles kun i forbindelse med arbejdet med de forskellige funktionstyper med henblik på, at eleverne forstår tankegangen bag at bruge inverse funktioner ved ligningsløsning, eksempelvis at løse $\exp(3 \cdot x) = 8$ ved at tage ln af højre- og venstreside. I de tilfælde, hvor der er problemer med flertydige løsninger, kan dette gennemgås i forbindelse med den konkrete type ligning.

I forbindelse med parallelforskydning af grafer skal eleverne kende tolkningen af parametrene a og b i udtrykket $y = f(x-a) + b$ som forskrift for den forskudte graf.

Karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner og deres grafiske forløb: lineære funktioner, polynomier, særligt andengradspolynomier, eksponential- og potensfunktioner, log_{10} og ln samt cosinus og sinus.

Karakteristiske egenskaber ved funktioner omfatter i denne sammenhæng definitions- og værdimængde, konstanters betydning, nulpunkter, vækstegenskaber, monotoniforhold og periodicitet. Eleverne skal kende og kunne forstå notation til angivelse af definitions- og værdimængde, herunder bestemme definitionsmængden i simple tilfælde, fx for $f(x) = \sqrt{(x+2)}$ eller $f(x) = 1/x^2$. Det er ikke et krav, at grafers asymptoter gives en systematisk behandling, men eleverne skal kende til de behandlede funktioners asymptotiske forløb.

Topunktsformlen for hældningskoefficient bevises. Det kan indgå i grundforløbet som eksempel på matematisk argumentation.

Arbejdet med lineære funktioner skal konsolidere grundskolens arbejde med stofområdet; herunder behandles koordinatsystemet, hældningskoefficient og bestemmelse af hældningskoefficient vha. topunktsformlen. Skæring mellem graferne for to lineære funktioner behandles.

Eleverne skal kende andengradspolynomiets graf samt betydningen af konstanterne, toppunkt, formlen for rødderne med tilhørende diskriminant samt faktorisering af andengradspolynomiet.

Eksponentialfunktioner omfatter formerne $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{k \cdot x}$, procentvis tilvækst samt fordoblings- og halveringskonstant. For potensfunktioner indgår procent-procentvækst. Eleverne skal kende og kunne bruge de grundlæggende regneregler for log_{10} *og ln*, særligt i forbindelse med løsning af ligninger af typen $a^x = c$. Eleverne skal kunne aflæse grafer i enkelt- og dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Radianer indføres som vinkelmål aht. behandlingen af de trigonometriske funktioner. Eleverne skal kunne opstille og fortolke udtryk på formen $f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + d$ ud fra oplysninger om fx amplitude og periode.

Bemærk, at for elever i étårige opgraderingsforløb til A-niveau er de trigonometriske funktioner cos og sin en udvidelse inden for området funktioner i forhold til B-niveau.

Matematisk modellering med ovennævnte funktionstyper, herunder anvendelse af regression.

Eleverne skal være fortrolige med modellering af sammenhænge ved hjælp af lineære funktioner, eksponentialfunktioner, potensfunktioner, andengradspolynomier samt de trigonometriske funktioner cosinus og sinus. De skal kunne foretage regression med disse funktionstyper og plotte data og model med hensigtsmæssigt valg af grafvindue.

Eleverne skal kunne forholde sig kritisk til en model og dens resultater, herunder hvorvidt modellen faktisk beskriver data eller rummer en systematisk variation. De skal have kendskab til begrebet skjulte variable samt kunne beregne absolut og relativ afvigelse. Ved den skriftlige prøve forventes ikke diskussion af årsager til, at en model eventuelt ikke ser ud til at beskrive data, herunder mulige skjulte variable.

Eleverne skal være i stand til at opstille matematiske sammenhænge ud fra en sproglig beskrivelse som fx "hastigheden, hvormed vandet trænger ud af beholderen, vokser proportionalt med hullets diameter, og proportionalitetskonstanten er…".

Ved modellering med inddragelse af et udleveret datamateriale skal eleverne kunne besvare spørgsmål om fremskrivninger og prognoser eller spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer, samt konkrete, beregningsmæssige spørgsmål på baggrund af bestemte oplysninger om konteksten.

Ved den skriftlige prøve kan opgavesættet være bilagt en datafil i Excel-format, hvor tallene er heltal eller decimaltal.

Differentialregning

Grænseværdi og kontinuitet som forudsætning for differentialregning. Definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed. Differentiation af $f+g$, $f-g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ og $f \circ g$ samt afledet funktion for de ovennævnte funktionstyper.

Inddragelsen af grænseværdi og kontinuitet skal give eleverne et grundlag for at forstå de grundlæggende argumenter i infinitesimalregningen, fx i beviserne for regneregler for differentialkvotient.

Eleverne skal introduceres til grænseværdibegrebet, eksempelvis grafisk eller baseret på taleksempler, så de forstår betydningen af udsagn som $f(x) \to 5$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to -\infty$ for $x \to 3$. Det er tilstrækkeligt at gennemgå regneregler for grænseværdier på basis af enkle eksempler. Kontinuitet kan ligeledes behandles på basis af grafer eller taleksempler.

Fortolkninger af differentialkvotient omfatter differentialkvotienten som tangentens hældningskoefficient og som væksthastighed for en funktion af tiden.

Differentialkvotienten for et udvalg af simple funktioner skal udledes, så eleverne er fortrolige med tankegangen bag disse beviser; det kan fx være lineære funktioner, kvadratrod, $1/x$, x^2 og x^3.

Regneregler for differentiation af $f+g$, $f-g$, $k \cdot f$ og $f \cdot g$ bevises; men beviset for differentiabilitet af $f \circ g$ forventes ikke gennemgået.

I delprøve 1 skal de nævnte regneregler for differentialkvotienter kunne benyttes, jf. de vejledende eksamensopgaver til niveauet.

Bemærk, at for elever i étårige opgraderingsforløb til A-niveau indgår behandlingen af beviserne for regnereglerne som en del af det supplerende stof, jf. afsnit 2.3.

Tangent, tangentligning. Numerisk bestemmelse af nulpunkter vha. Newtons metode.

Tangentligningen opstilles. Behandlingen af tangentens ligning (det approksimerende førstegradspolynomium) kan bruges til fx at beregne tilnærmede værdier.

Inddragelsen af Newtons metode er en oplagt lejlighed til at behandle algoritmer i matematik og at illustrere forskellen mellem eksakt og numerisk løsning af ligninger.

Arbejdet med tangenter og tangentens ligning kan også bruges som et afsæt for arbejde med approksimerende polynomier af højere grad, fx Taylorpolynomier.

Monotoniforhold, ekstrema og optimering, herunder sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient.

Eleverne forventes grafisk at kunne aflæse monotoniforhold og ekstrema, ligesom de skal lære at bruge f' til at bestemme ekstrema og monotoniforhold for f og omvendt at udtale sig om f' ud fra en graf for f.

Ved den skriftlige prøve forventes eksaminanderne på basis af en beskrevet situation at kunne opstille en matematisk model i form af en funktionsforskrift, undersøge modellen matematisk fx vha. differentialregning og drage relevante konklusioner.

Bestemmelse af ekstrema indgår naturligt i forbindelse med modellerings- og optimeringsopgaver, hvor man skal finde en største- eller mindsteværdi af en størrelse under visse betingelser.

Stamfunktion og integral

Stamfunktion for de nævnte funktioner. Ubestemt og bestemt integral. Sammenhængen mellem areal og stamfunktion.

De fleste hold vil vælge at introducere integralregningen gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet, og man bør her trække på elevernes erfaringer fra differentialregningen og omtale bestemmelse af stamfunktioner som den omvendte proces af differentiation, så eleverne som udgangspunkt kan finde reference i allerede kendt stof.

Integralet som grænseværdi for summer kan behandles som supplerende stof.

Regneregler for integration af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$. Integration ved substitution.

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed med bestemmelse af stamfunktion for de elementære funktioner og med regnereglerne (sum, differens, 'gange en konstant' og substitution) for bestemte og ubestemte integraler, at de kan håndtere problembehandling, hvor disse begreber indgår.

Anvendelse af integralregning, herunder volumen af omdrejningslegemer.

Til anvendelser hører problembehandling, der involverer integraler til bestemmelse af areal afgrænset af funktioner samt volumen af omdrejningslegemer.

I nogle tilfælde vil matematisk modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for integration, der er beskrevet i kernestoffet. I tilfælde som disse forventes eleverne at anvende digitale værktøjer.

Differentialligninger

Differentialligninger: Differentialligninger af første orden, herunder kvalitativ analyse og løsning af differentialligninger af formerne $y' = f(x)$, $y' = k \cdot y$, $y' = b - a \cdot y$, $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$. Løsning med separationsmetoden. Numerisk løsning vha. Eulers metode. Opstilling af simple differentialligningsmodeller af første orden.

Ved kvalitativ analyse af en differentialligning forstås en sprogliggørelse af en differentialligning, hvor eleverne eksempelvis forholder sig til, hvordan væksthastighed eller en funktionsværdi udvikler sig med tiden.

Begrebet hældningsfelt indgår naturligt i beskrivelsen af differentialligninger af formen $y' = h(x,y)$, men eksaminanderne forventes ikke ved den skriftlige prøves delprøve 2 at kunne tegne hældningsfelter med deres digitale værktøj.

Et udvalg af sætninger om løsninger til differentialligninger bevises med henblik på at konsolidere begrebsforståelsen og forståelsen af spørgsmål om eksistens og entydighed af løsning til en differentialligning; herunder bevises sætningen om løsning til differentialligningen $y' = k \cdot y$. Ved den skriftlige delprøve 1 skal eleverne kunne opstille løsninger til differentialligninger af typen $y' = k \cdot y$, $y' = b - a \cdot y$ og den logistiske differentialligning $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$.

Løsning med separationsmetoden.

Der lægges vægt på de ovenfor nævnte former for differentialligninger, men eksempelvis er separable differentialligninger nyttige i forbindelse med modellering, og disse differentialligninger skal kunne håndteres med brug af digitale værktøjer. Der er ikke krav om, at eleverne skal lære at løse differentialligninger med separationsmetoden ved håndkraft, men løsning af separable differentialligninger med digitalt værktøj kan indgå i den skriftlige delprøve 2.

Numerisk løsning med Eulers metode.

Ved numerisk løsning af differentialligninger behandles Eulers metode. Behandlingen kan baseres på eksempler, og der er ikke krav om konvergensovervejelser etc. Ved den skriftlige prøves delprøve 2 stilles ikke opgaver, hvor eleverne skal bestemme løsninger til differentialligninger med numeriske metoder.

Arbejde med Eulers metode er en oplagt lejlighed til at behandle algoritmer i matematik og at illustrere forskellen mellem eksakt og numerisk løsning af matematiske problemer.

Opstilling af simple differentialligningsmodeller af første orden.

Eleverne skal kunne opstille og behandle simple første ordens differentialligningsmodeller ud fra en sproglig beskrivelse af modellen som fx "den hastighed, hvormed dæktrykket vokser, er proportional med trykforskellen mellem beholder og dæk".

Emnet egner sig godt til et flerfagligt samarbejde i mange retninger med fx fysik om radioaktivt henfald, kemi om reaktionskinetik, biologi om smittespredning eller samfundsfag om befolkningsudvikling.

2.2.4 Sandsynlighedsregning og statistik

Deskriptiv statistik

Beskrivelse og grafisk repræsentation af diskret og grupperet datamateriale, statistiske deskriptorer.

For ugrupperede data skal eleverne blive fortrolige med begreberne hyppighed, frekvens og kumuleret frekvens. De statistiske deskriptorer er middelværdi, varians, spredning, median og øvrige kvartiler for et datasæt. De grafiske repræsentationer, som eleverne skal kunne behandle, er søjlediagram og boksplot. Ved den skriftlige prøves delprøve 1 skal eleverne kunne producere disse diagrammer, men dette kræves ikke ved delprøve 2.

For grupperet datamateriale skal eleverne blive fortrolige med intervalhyppighed, intervalfrekvens og kumuleret frekvens. De statistiske deskriptorer er her middelværdi, varians, spredning, median og øvrige kvartiler samt fraktiler. De grafiske repræsentationer, som eleverne skal kunne behandle, er histogram og sumkurve. Ved den skriftlige prøves delprøve 1 skal eleverne kunne producere disse diagrammer, men dette kræves ikke ved delprøve 2.

Datasæt til brug ved opgaver ved den skriftlige delprøve 2 kan være en fil i Excelformat, hvor tallene på A-niveau kan være heltal eller decimaltal.

Der findes flere forskellige definitioner af fraktiler for diskret datamateriale. Ved de skriftlige prøver accepteres alle gængse standarder.

Deskriptiv statistik har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes inden for matematikundervisningen selv. Hvor det er muligt, er det en stor fordel for indlæring af begreber og metoder, at det foregår i et samarbejde med andre fag som samfundsfag eller naturvidenskabelige fag, der som en naturlig del af faget producerer datamaterialer, som kan behandles i matematik.

Sandsynlighedsregning

Sandsynlighed, sandsynlighedsfelt, særligt symmetrisk sandsynlighedsfelt. Hændelse. Kombinatorik, herunder kombinationer. Stokastisk variabel, herunder middelværdi og spredning. Binomialfordelingen, herunder beregning af tilhørende sandsynligheder samt middelværdi og spredning. Normalfordelingen, herunder beregning af tilhørende sandsynligheder samt middelværdi og spredning.

Sandsynlighedsfelter, herunder symmetriske sandsynlighedsfelter, behandles som model for stokastiske eksperimenter gennem konkrete eksempler.

Eleverne skal have kendskab til både a priori (på forhånd givne) og frekventielle (statistisk bestemte) sandsynligheder og kende forskellen på disse.

Hændelser og uafhængige hændelser kan omtales i forbindelse med problemløsning, der kræver multiplikation af sandsynligheder. Eleverne skal kunne læse og forstå gængs notation fra mængdelæren, så de er i stand til at udnytte mængdeangivelser i forbindelse med hændelser i udfaldsrum, jf. afsnit 2.2.1.

I kombinatorik indgår additions- og multiplikationsprincipperne. Formlen for $K(n,r)$ indgår og bevises, evt. ud fra eksempler.

Eleverne skal kunne udføre beregninger af sandsynligheder i symmetriske sandsynlighedsfelter, herunder anvende formlen for $K(n,r)$. Eleverne forventes kun at kunne håndtere sandsynlighedsberegninger med brug af denne formel i opgaver af typen 'antal gunstige divideret med antal mulige', hvor 'antal gunstige' kan udregnes med en eller flere kombinatoriske beregninger og 'antal mulige' med én kombinatorisk beregning.

Begrebet stokastisk variabel kan indgå i undervisningen som en måde at knytte tal til udfald af et stokastisk eksperiment. Stokastisk variabel kræves kun behandlet, så eleverne forstår og kan bruge notation herom, fx $X \sim b(n,p)$ eller $E(X) = 15$.

I forbindelse med binomialfordelingen bevises formlen for binomialfordelingens punktsandsynligheder, evt. ud fra generalisering af eksempler.

I normalfordelingen indgår normalfordelingens tæthedsfunktion og fordelingsfunktion som integraler. Eleverne skal kunne opstille integraler til bestemmelse af intervalsandsynligheder og bestemme dem med deres digitale værktøj.

Statistik

Binomialfordelt statistisk materiale. Estimation af basissandsynligheden. Hypotesetest i binomialfordelingen, herunder nulhypotese og alternativ hypotese, kritisk område og acceptområde samt signifikansniveau.

I forbindelse med hypotesetest i binomialfordelingen er de centrale begreber: population, stikprøve, repræsentativitet, nulhypotese, signifikansniveau, kritisk område og acceptområde samt p-værdi. Eleverne skal kunne estimere basissandsynligheden som forholdet mellem antallet af 'succeser' og antallet af gentagelser.

Der arbejdes med tosidet test. Eleverne skal på et forelagt signifikansniveau kunne teste $H_1: p \neq p_0$ mod nulhypotesen $H_0: p = p_0$ og gøre rede for resultatet, herunder kunne formulere i hverdagssprog, hvad testresultatet siger om populationen.

2.3 Supplerende stof

Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof, der skal udfylde mindst 10 pct. af undervisningstiden, skal uddybe arbejdet med kernestoffet, indeholde nye emner eller metoder og perspektivere faget med vægt på faglig argumentation.

Emnerne kan vælges såvel inden for som uden for de allerede behandlede hovedområder af matematikken. Ved at vælge emner, der lægger op til samarbejde med andre af elevernes fag, åbnes der samtidigt for en perspektivering af faget, som kan understrege fagets relevans i andre sammenhænge.

Perspektivering af kernestoffet kan ofte ske gennem en anvendelse af matematik i andre fag eller demonstration af fagets relevans i forhold uden for matematikken. Eksempelvis kan arbejdet med rentesregning afrundes med et samarbejde med samfundsfag, hvor holdet læser supplerende stof i matematik om fx annuiteter som grundlag for en behandling af privatøkonomiske forhold.

Perspektivering kan også være en fagintern perspektivering, hvis fx cosinusrelationerne genbesøges og bevises nemt, når man har vektorregning til rådighed. Holdet kan også vælge at gøre mere ud af teorien bag separationsmetoden eller bag numeriske metoder.

Det supplerende stof skal omfatte matematikhistoriske perspektiver på udvalgte emner.

Matematikhistoriske perspektiver kan inddrages som elementer i forløb eller være udgangspunkt for særskilte forløb efter det enkelte holds valg.

Nogle eksempler kan være matematikinterne forløb om
- geometriens grundlag med inddragelse af dele af Euklids "Elementer"
- tangentbestemmelse historisk set
- sandsynlighedsregning og hasardspil.

Behandlingen af de matematikhistoriske perspektiver kan også ske i forbindelse med flerfagligt samarbejde.

Særligt for treårige hold til A-niveau
På treårige hold til A-niveau skal der gennemføres et forløb, der har fokus på mundtlig fordybelse.

Det er naturligt i en studieretning med matematik på A-niveau at placere arbejde med supplerende stof som led i et samarbejde med studieretningens andre fag. Nogle eksempler fra forskellige studieretninger med matematik A kan være
- Matematik og kemi: holdet kan arbejde med matematisk behandling af reaktionskinetik.
- Matematik og fysik: holdet kan arbejde med matematisk modellering af fysiske systemer vha. differentialligninger som fx radioaktivt henfald eller bevægelseslovene.
- Matematik og bioteknologi: holdet kan arbejde med smittespredning med udgangspunkt i fx covid-19.
- Matematik og samfundsfag: holdet kan arbejde med ulighed og ginikoefficienter eller lineær algebra og store økonomiske modeller.
- Matematik og musik: holdet kan arbejde med toneskalaer, evt. i forbindelse med matematikhistorie.

Særligt for étårige hold til A-niveau

For étårige hold, der løfter matematik B til A-niveau, gennemføres et forløb med sigte på mundtlig formidling og faglig konsolidering af stoffet fra B-niveau svarende til A-niveauets krav til argumentation og abstraktion.

Den således afsatte tid er først og fremmest nødvendig for at sikre en faglig dybde i infinitesimalregning, hvor kravene på matematik A er udvidet sammenlignet med matematik B. Det gælder dels kravet om gennemgang af begreberne grænseværdi og kontinuitet som udgangspunkt for differentialregning, dels beviserne for regnereglerne for differentialkvotienter.

2.4 Omfang

Det forventede omfang af fagligt stof er normalt svarende til 500-700 sider afhængigt af det valgte undervisningsmateriale.

3 Tilrettelæggelse

3.1 Didaktiske principper

Elevforudsætninger

Undervisningen tager udgangspunkt i et fagligt niveau svarende til elevernes niveau fra grundskolen.

I sin afrapportering omtaler Matematikekspertgruppen[3], hvorledes elever ved overgang fra grundskolen til de gymnasiale uddannelser kan opleve et skifte i matematikundervisningen. Grundskolens matematikundervisning med præg af problembehandling inden for hverdagsanvendelser med vægt på det forklarende og beskrivende afløses af de gymnasiale uddannelsers tilgang, der stiller gradvist større krav om en mere abstrakt, teoretisk og analyserende tilgang. Samtidigt oplever eleverne også et skift i kravene til begrebsmæssig præcision og krav om at kunne redegøre matematisk for, hvordan resultater fremkommer.

Dette skifte kan være en udfordring for mange elever i starten af forløbet. Derfor er det særligt vigtigt at være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger, så eleverne kan opleve, at undervisningen foregår på deres faglige præmisser, uanset at der er en intention om gradvis at udvikle elevernes forståelse for matematisk argumentation.

Samtidig er det afgørende, at eleverne får hjælp til en god start på faget gennem etablering af gode studievaner og rutiner, og at deres aktive deltagelse og motivation støttes. I et længere perspektiv er det nok mindre vigtigt, at undervisningen i starten kommer hurtigt frem i kernestoffet, fordi elever, der møder med dårlige studievaner, hurtigt kan komme bagud i et kumulativt opbygget fag som matematik.

Grundforløbet

I grundforløbet skal eleverne gradvis gøres bevidste om de gymnasiale krav i forbindelse med såvel skriftlig som mundtlig matematik. Lineære funktioner og modellering med lineære funktioner skal indgå i det faglige stof i grundforløbet, og dette stofområde skal indgå i screeningen i grundforløbets afsluttende del, jf. pkt. 4.1.

Undervisningen i matematik i grundforløbet skal koordineres med undervisningen i naturvidenskabeligt grundforløb.

Det er en central del af grundforløbets matematikundervisning at gøre de ovennævnte forandringer i tilgangen i undervisningen tydelige for eleverne, fordi gymnasiets anderledes tilgang har betydning for elevernes valg af studieretning.

Denne udvikling skal på den ene side ske så gradvis, at såvel elevernes faglige udgangspunkt som deres opfattelse af, hvad matematikfaget 'er', respekteres. På den anden side skal eleverne gøres bevidste om denne forskel, så de kan forstå arten af de faglige krav, de vil møde på studieretninger med matematik på C-, B- eller A-niveau.

[3] Ekspertgruppe i matematik: "Fælles udvikling af matematik". Børne- og Undervisningsministeriet (august 2022).

Undervisningen i lineære modeller er en oplagt mulighed for samarbejde med fagene i naturvidenskabeligt grundforløb. Arbejdet med lineær regression på autentiske data fra eksperimenter i naturvidenskabeligt grundforløb kan understøtte elevernes tidlige oplevelse af matematik som et fag, der egner sig til modellering af omverdensfænomener.

Matematikfaggruppen på en skole har derudover frihed til at vælge fagligt indhold, brug af digitale værktøjer og undervisningsform i grundforløbet, så undervisningen i grundforløbet i sin helhed bidrager til at styrke eleveres interesse for matematik og indtryk af sammenhæng mellem de forskellige gymnasiefag, og så eleverne har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet.

Matematikscreeningen i grundforløbet skal være individuel og benyttes i forbindelse med vejledning af eleven i forbindelse med studieretningsvalget. Screeningen skal anvendes til at få et indblik i, om den enkelte elev er i stand til at anvende det faglige stof, som er behandlet i grundforløbet, til at løse forskellige typer af opgaver knyttet hertil.

Skolen udarbejder selv screeningen i matematik. Indhold og vilkår for den afsluttende screening er nærmere omtalt i afsnit 4.1 Løbende evaluering.

Undervisningens tilrettelæggelse

Undervisningen i matematik tilrettelægges, så målene med de enkelte forløb er tydelige for eleverne, og så eleverne motiveres til at arbejde med faget samtidig med, at deres nysgerrighed og kreativitet stimuleres.

Læreplanens faglige mål er slutmål, som udgør grundlaget for evalueringen af elevernes udbytte af undervisningen i matematik A ved de afsluttende prøver. Undervisningen skal planlægges med en progression i kravene og passende valgte delmål, så eleverne har mulighed for til sidst at have nået de faglige måls krav til viden, færdigheder og kompetencer. Her kan man med fordel tænke på den "gradinddeling" af kompleksiteten af elevens forståelse af det faglige stof, som SOLO-taksonomien tilbyder.

Det er lærerens opgave at konkretisere målene med hvert forløb og at gøre eleverne bevidste om dem, så de forstår målene og kan se vejen derhen. Det kan med fordel også gælde den enkelte lektion. Når eleverne løbende kan se sammenhængen og forstår meningen med undervisningen, har de bedre mulighed for at fokusere deres indsats på det, de skal lære.

Samtidig skal undervisningen tilrettelægges, så elevernes nysgerrighed og kreativitet stimuleres.

Matematik kan som fag nemt opfattes som "færdigstøbt" set fra elevernes synsvinkel. Men historisk set er faget i stadig udvikling, båret af menneskelig nysgerrighed og kreativitet og i en vekselvirkning mellem anvendelse og teoribygning, jf. afsnit 1.1. Identitet. Den erkendelse om fagets udvikling er værdifuld i sig selv, og det kan desuden være en kilde både til motivation for eleverne, hvis de får lejlighed til selv at se eksempler på, hvordan matematik opstår. Eksempelvis kan det ske ved, at eleverne undersøger og "opdager" matematiske sammenhænge i faget, at de arbejder med ikke-rutineprægede problemstillinger, eller at de opstiller og undersøger modeller for omverdensfænomener eller fænomener fra andre fag. Eleverne kan også arbejde med små eksperimenter med matematikken med eller uden CAS-værktøj, fx ved at undersøge, hvordan parablens udseende afhænger af parametrene i det tilhørende andengradspolynomium. Inden for sandsynlighedsregning og statistik er det oplagt at lade elever indsamle autentisk datamateriale og derefter designe og gennemføre en statistisk undersøgelse, fx ud fra spørgeskemaundersøgelser om brug af mobiltelefon. Ved historisk perspektivering af emner kan man inddrage, hvordan matematik er blevet til i en udviklingsproces, eller lade eleverne se på forskellige tiders behandling af samme faglige område.

Hovedvægten lægges i matematik A på brug af matematik som middel til at gennemføre matematiske argumenter og analysere matematiske sammenhænge på basis af eksempler fra matematik, andre fag eller elevernes omverden.

Hovedvægten i undervisningen lægges på arbejdet med at forstå matematiske begreber, sammenhænge og metoder gennem opbygning af matematisk teori.

Når eleverne beskriver og arbejder med at forstå matematiske sammenhænge, inddrages også eksempler uden for matematikken, der leverer en arbejdsmark for elevernes arbejde med matematiske argumenter og analyse af matematiske sammenhænge, ligesom inddragelse af eksempler fra elevernes øvrige fag i undervisningen kan hjælpe eleverne til at se større sammenhænge på tværs af fag. Se i den forbindelse også bemærkningerne i afsnit 2.3 om supplerende stof i treårige forløb.

Analysen af matematiske sammenhænge kan også ske i form af små eksempler, hvor tabeller, formler, grafer, ligninger eller sammenhænge, som er beskrevet og anvendt i andre fag, genbehandles med de "matematiske briller" i matematikundervisningen. Elevernes arbejde med tilsyneladende forskellige eksempler som raketbevægelse, blodsukkerniveau, spændingsvariation på lysnettet eller udviklingen i verdens regnskovsareal bidrager til, at de kan se en fælles beskrivelsesramme, som matematik leverer.

Ved at inddrage elevernes omverden kobles matematikken til noget, eleverne naturligt kan finde vedkommende og relevant. Hvad elevernes omverden består af afhænger af elevgruppen. Forskellige emner kunne være: klimaproblematikker, festivalbesøg, at flytte hjemmefra, at købe bil, dating, SoMe og sundhed.

Ræsonnement
I matematik A skal faglige påstande og sætninger som hovedregel underbygges med bevis eller anden form for sammenhængende argumentation, så eleverne får indsigt i matematiks deduktive og kumulative opbygning.

Det er et slutmål i matematik A, at eleverne med selvstændighed kan gennemgå argumentation og bevisførelse for centrale resultater fra undervisningen og må altså have en væsentlig plads i undervisningen.

Fagets deduktive natur er centralt og bør introduceres tidligt. Eksempelvis kan udledningen af topunktsformlen for hældningskoefficienten for en ret linje, trigonometriske beviser eller opstilling af løsningsformlen for en andengradsligning give mulighed for tidligt forløbet naturligt at sætte fokus på, hvordan et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af argumenter.

Eleverne skal blive fortrolige med opbygningen af deduktiv matematisk teori ud fra dens grundelementer: definitioner, sætninger og beviser. Sætninger og formler gennemgås som hovedregel med bevis. Men det er ikke et krav, at samtlige resultater underbygges med teoretisk bevis. Der vil også være væsentlige dele af teoridannelsen, hvor bevisførelse ikke er tilgængelig på gymnasialt plan eller må udelades i en prioritering af arbejdet, fx monotonisætningen eller sætningen om differentiabilitet af sammensat funktion. I vejledningens afsnit 2.2. Kernestoffet præciseres i nogle fagområder kravene til bevisførelse.

I enkelte situationer kan argumentation også ske ved hjælp af taleksempler. Eksempelvis er det i forbindelse med behandlingen af binomialfordelingens punktsandsynligheder tilstrækkeligt at gennemføre argumentation baseret på taleksempler, fordi brugen af en rigoristisk korrekt notation ellers kan skygge for bevisets essens for nogle elever.

I nogle forløb tilrettelægges undervisningen deduktivt. Tilegnelsen af beviser giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor sætningens forudsætninger er nødvendige. I andre forløb vil mindre rigoristiske ræsonnementer fylde mere, fx i statistik eller i forløb, der tilrettelægges induktivt. Matematisk ræsonnement bør også trænes eksplicit i arbejdet med matematisk modellering.

Særligt for étårige hold til A-niveau
Læreplanen i matematik A, stx, stiller højere krav om niveauet af argumentation og ræsonnement, end tilfældet er for matematik B. Det er et led i undervisningen af det étårige hold til A-niveau at løfte til dette højere niveau.

I vejledningen til læreplanen i matematik B, stx, er en række faglige områder udpeget, hvor der skal være særligt fokus på argumentation, og sætninger skal underbygges med bevis. Det er sket for at understøtte, at eleverne fra forskellige B-niveau-hold kan ankomme til undervisningen på det étårige valghold i matematik A, stx, med fælles forudsætninger i argumentation og bevisførelse, som der kan bygges videre på. Det drejer sig især om

- Trigonometri: de væsentligste sætninger, herunder sinus- og cosinusrelationerne
- Differentialregning: Differentiation af et udvalg af simple funktioner
- Sandsynlighedsregning: Formlen for punktsandsynligheder i binomialfordelingen og formlen for $K(n,r)$.

Når dette stof skal indgå i matematik A, stx, kan det eksempelvis ske ved, at man i forbindelse med behandling af vektorregningen på det étårige hold inddrager cosinus- og sinusrelationerne og på den måde skaber forbindelse mellem vektorregning og trigonometri. Tilsvarende behandles differentialregningen på et højere niveau i forbindelse med forløbet i det supplerende stof med sigte på faglig konsolidering af stoffet fra B-niveau, jf. afsnit 2.3. Supplerende stof, Særligt for étårige hold til A-niveau. Beviset for punktsandsynlighederne i binomialfordelingen kan genbesøges og begrundes i forbindelse med holdets arbejde med normalfordelingen.

Kernestoffet i matematik B, hf, indeholder ikke cosinus- og sinusrelationerne, arealformlen, potensvækst og differentiation af sammensat funktion.

Faglig progression
Der skal sikres progression i kravene til elevernes selvstændighed mht. argumentation, problemløsning og modellering samt i den faglige fordybelse, herunder i arbejdet med at læse, bearbejde og formidle matematisk tekst.

Læreplanen formulerer sig om de slutmål, eleverne skal nå. Man kan derfor med fordel for det enkelte hold undervejs opstille realistiske delmål for forløbene, som præsenteres for eleverne, så de har mulighed for at opleve faglig mestring og selvstændighed undervejs i forløbet.

Kravet om progression afspejles naturligt i den rækkefølge, som man vælger at behandle kernestoffet i. På samme vis kan kravene til dybde og præcision i argumentation, problemløsning og modellering udvikles undervejs. Progressionen afspejler sig også i, at eleverne senere i forløbet i højere grad på egen hånd kan læse nyt materiale på forhånd selv, og i graden af selvstændighed i elevernes arbejde med stoffet i undervisningen.

En udvikling i kravene til dybde og præcision i argumentation og bevisførelse hænger naturligt sammen med den valgte rækkefølge i gennemgangen af kernestoffet fra det mest konkrete som fx trigonometri til det mest abstrakte som fx statistiske test eller differentialligninger.

Rækkefølgen i behandlingen af kernestoffet må, i det omfang, det kan lade sig gøre uden tab af faglig sammenhæng og progression, afstemmes med forventninger fra centrale samarbejdsfag og flerfagligt arbejde i holdets studieretning, jf. afsnit 3.4. Samspil med andre fag.

For problemløsning kan progressionen bestå i, at opgaverne i det enkelte forløb udvikler sig fra små, rene træningsopgaver til større og mere komplekse opgaver, eksempler på eksamensopgaver eller projektforløb.

Tilsvarende kan arbejde med modellering udvikles fra helt lukkede små-eksempler, der behandler enkle momenter i en modelleringscyklus, til længerevarende, mere åbne eller selvstændige projekter om modellering.

Problemløsning

Problemløsning er centralt i arbejdet i matematik og indgår såvel i undervisningen som i elevernes selvstændige fordybelse i faget. Arbejdet med problemløsning skal tilrettelægges med progression under hensyn til konsolidering af elevernes færdigheder i alle kernestofområder.

Problemløsning er et centralt element i matematikundervisningen på alle niveauer som anledning til at arbejde med analyse af matematikholdige problemstillinger med inddragelse af matematisk argumentation, sprog og repræsentationsformer, ligesom det er en formel ramme om arbejde med matematiske modeller og kan give perspektivering af stoffet.

Eleverne kommer fra en tilgang i grundskolens matematikundervisning, hvor problemløsning om særligt hverdagsanvendelser har vægt på det forklarende og beskrivende. Det er derfor en væsentlig omstilling for de nye gymnasieelever, når matematik i gymnasiet rummer krav om en mere abstrakt, teoretisk og analyserende tankegang. Det gælder krav til dels elevernes præcision i sprogbrug og argumentation, dels deres redegørelse for, hvordan de har nået et givet resultat.

En besvarelse af en opgave, der blot rummer "facit", er utilstrækkelig i gymnasial matematik. Der skal være en progression i forventningen til elevernes præcision i sprogbrug og argumentation samt til deres redegørelse for, hvordan de har nået et givet resultat. Ved den afsluttende skriftlige prøve indgår det i helhedsvurderingen af besvarelsen, at eksaminandens tankegang klart fremgår af besvarelserne af opgaver.

Særligt elever på étårige valghold til matematik A har behov for at diskutere kravene til problemløsning, så de er opmærksomme på, at problemløsningen nu skal ske på et højere niveau. De må orienteres om, at elementært stof fra de underliggende niveauer kan indgå og forventes behandlet på det højere abstraktions- og vidensniveau og med den større sikkerhed i problemløsningen og formidlingen af besvarelsen, der kendetegner A-niveauet.

Elevernes udbytte af det skriftlige arbejde med problemløsning kan øges ved at få dem til at fokusere på, hvad de hver gang skal lære, så elevens fornemmelse af nytte ved problemløsningen fastholdes, og problemløsning ikke over tid reduceres til et ritual, der blot skal overstås, og et produkt, der bare skal leveres. Variation i produkt- og arbejdsform samt tydelighed om det ønskede såvel som opnåede faglige udbytte er centrale greb.

Der er mange muligheder for variation af det skriftlige arbejde med problemløsning. I kortere sessioner kan eleverne eksempelvis arbejde med problemløsning på digitale, adaptive platforme. De længere afleveringer kan suppleres med screencasts, hvor afleveringen er elevens gennemgang af sin egen opgaveløsning. Også feedback på afleveringer kan varieres, fx gennem brug af peer-feedback eller samtaler med elever, der i grupper præsenterer deres løsning af opgaver for hinanden eller læreren.

Eksempler på undersøgende tilgang

Eleverne skal møde eksempler på en undersøgende tilgang til matematiske problemstillinger og modeller, så de får mulighed for selvstændigt at formulere og undersøge påstande.

Ved undersøgelsesbaserede aktiviteter bruger eleverne deres eksisterende viden (fx færdigheder, metoder og begreber) på nye måder og nye problemstillinger, så for dem ny viden udvikles. Undersøgelsesbaserede aktiviteter er således tæt knyttet til ræsonnementskompetencen, da undersøgelserne kræver en følge af argumenter. Aktiviteterne kan derfor være med til at give forståelse for opbygningen af matematisk teori.

Eksempler på undersøgelsesbaserede aktiviteter kan være, at man lader eleverne undersøge, hvad der sker med arealet af en trekant, når siderne i trekanten forstørres med en bestemt størrelse. Inden for deskriptiv statistik kunne man give eleverne to datasæt bestående af lønningerne i to firmaer. Eleverne skal så svare på, hvilket firma, de helst vil ansættes i. I arbejdet med funktionsklasserne og i modellering med differentialligninger kan eleverne undersøge betydningen af variation af parametre.

Arbejde med en undersøgende tilgang kan være en ny arbejdsform for eleverne, som derfor kan have særligt behov for tydelige rammer ved denne type arbejde.

Kravet om, at eleverne skal møde eksempler på en undersøgende tilgang, er formuleret enslydende i læreplanerne på C-, B- og A-niveau (stx). På étårige hold til A-niveau, som er tidsmæssigt udfordrede, er omfanget af inddragelse af en undersøgende tilgang op til underviserens didaktiske valg, idet man kan regne med, at undervisningen på det underliggende niveau har honoreret kravet.

Åbne problemstillinger

Der skal tilrettelægges mindst ét forløb, hvor eleverne i mindre grupper arbejder med åbne eller delvist åbne problemstillinger; problemstillingerne kan stamme fra matematik eller andre fag med et betydeligt element af anvendt matematik.

Arbejde med en åben eller delvist åben problemstilling kan være en ny arbejdsform for eleverne. Det kan være svært for eleverne at overskue arbejdet og holde fokus, når den daglige sekvensering af undervisningen forsvinder. Det kræver derfor hjælp med en anden form for strukturering af arbejdet, end eleverne er vant til. Elever kan fx støttes ved, at læreren i starten fastlægger rammer for, hvordan eleverne skal gribe arbejdet an. Man kan eksempelvis understøtte en sekvensering af elevernes gruppearbejde ved at lave peerfeedback-grupper, præsentationsrunder, vejledningssamtaler, opstille delmål og indføre delprodukter.

Den åbne problemstilling, eleverne arbejder med, kan stamme fra matematikken selv eller fra andre fag, fx i et tværfagligt forløb. Det kan eksempelvis ske i forlængelse af problembaseret eller undersøgelsesbaseret undervisning, hvor eleverne gennem arbejdet bliver nysgerrige på og måske selv i stand til at formulere åbne autentiske spørgsmål, der er vedkommende for dem. Hvis ikke alle elever arbejder med samme åbne eller delvist åbne problemstilling, giver det en god mulighed for differentiering.

Eksempler på områder i kernestoffet, der kunne danne udgangspunkt for elevers selvstændige arbejde med åbne eller delvis åbne problemstillinger:

- Procent- og rentesregning: Elevers privatøkonomi
- Deskriptiv statistik, evt. i flerfagligt samarbejde: Elevers brug af mobiltelefon eller sociale medier
- Sandsynlighedsregning: Hasardspil og gevinstsandsynlighed
- Modellering: Radioaktive henfaldskæder eller rovdyr-byttedyr-population.

Læreplanens omtale betyder ikke, at et arbejde med åbne problemstillinger skal udgøre hele behandlingen af et fagområde, men at det indgår som en del af et større arbejde med et fagområde, eksempelvis ved at lade eleverne have et forløb, som er et gruppearbejde om kviklån som led i et større arbejde om procent- og rentesregning.

Kravet om tilrettelæggelse af mindst ét forløb med åbne problemstillinger er formuleret enslydende i læreplanerne i matematik B (hf og stx) og matematik A (stx). På étårige hold til A-niveau, som er tidsmæssigt udfordrede, er omfanget op til underviserens didaktiske valg, idet man kan regne med, at undervisningen på det underliggende niveau har honoreret kravet.

Modellering

Modellering skal indgå som en væsentlig del af undervisningen.

Matematisk modellering indgår i de faglige mål i matematik på alle niveauer på stx og hf, fordi alle elever uanset niveau skal kunne arbejde med matematisk modellering af problemstillinger; se også omtalen i afsnit 1.1 Identitet af Matematikkommissionens afrapportering (2016). Modellering indgår således som aspekt i behandlingen af alle kernestoffets hovedområder med henblik på at vise anvendelsesorienterede sider af faget med afsæt i andre fag eller omverdensfænomener.

Lineære modeller er centrale allerede i grundforløbet på grund af deres omfattende brug i modellering, muligheden for at bygge videre på viden fra grundskolen og for flerfagligt samarbejde med navnlig naturvidenskabelige fag og samfundsfag straks fra uddannelsens start.

Samtidig med, at lineære modeller er fagligt tilgængelige for eleverne fra starten af uddannelsen, giver de mulighed for straks at arbejde med mere generelle aspekter af modellering såsom forsimplende antagelser ved modelleringen, systematisk og tilfældig afvigelse, konfunderede variable, interpolation og ekstrapolation samt modellers kvalitet og rækkevidde. Endelig åbner de lineære modeller for en matematisk generalisering i form af tilpasning af polynomier af højere grad som del af differentialregningen.

Eleverne skal lære at modellere geometriske fænomener i to og tre dimensioner, benytte funktionsudtryk til modellering af variabelsammenhænge og kunne bruge simple differentialligninger af første orden i modelleringen, jf. gennemgangen af kernestoffet.

Eleverne skal lære at opstille, bearbejde og fortolke simple matematiske modeller ud fra et givet talmateriale, en figur eller en beskrivende tekst, hvor de elementære funktioner bringes i anvendelse, jf. gennemgangen af kernestoffet, herunder ved regression

Modelleringskompetencen indgår i den afsluttende skriftlige prøve i faget, hvor konkrete matematiske modeller behandles.

Eleverne kan for at styrke deres kreative og innovative evner gennem arbejdet med især modellering se, hvordan man på baggrund af matematisk viden kan opstille modeller til behandling af problemer uden for faget, hvor man selv kun i begrænset omfang kender den faglige baggrund.

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem, fx et optimeringsproblem, mens andre udspringer af fx økonomiske eller naturvidenskabelige sammenhænge, hvor eleverne arbejder med at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer.

Ved modellering af omverdensfænomener kan man inddrage eleverne i overvejelser om en mulig models rækkevidde, herunder betydningen for modellens anvendelse af indlagte, idealiserende forsimplinger.

Modellering er et oplagt udgangspunkt for flerfagligt samarbejde, fordi andre fags anvendelse af matematik ofte tager udgangspunkt i modellering. Se fx omtalen af arbejdet med kernestoffet i differentialligninger i afsnit 2.2. Kernestof.

Digitale værktøjer
Digitale værktøjer, herunder CAS-værktøjer, skal indgå i elevernes arbejde med kernestofområder, hvor det er relevant som værktøj til modellering, problemløsning og formidling.

I dette afsnit af læreplanen behandles krav vedrørende brug af digitale værktøjer, herunder CAS-værktøjer, til arbejde med modellering, problemløsning og formidling. De rent tekniske krav til de digitale værktøjer, som eleverne skal have til rådighed og undervises i brugen af, specificeres i afsnit 3.3. It. Endelig præciseres i afsnit 2.2. Kernestof brugen af digitale værktøjer inden for enkelte kernestofområder.

Elevernes brug af digitale værktøjer tjener forskellige hensyn. Overordnet skal matematik på lige fod med andre fag bidrage til elevernes digitale dannelse, men også en række faginterne hensyn peger på brug af digitale værktøjer i matematikundervisningen. Som fagets værktøj indgår digitale værktøjer naturligt i mange sammenhænge i arbejdet med bl.a. regression, graftegning, beregninger i stedet for tabelopslag, behandling af statistiske data og løsning af differentialligninger. Digitale værktøjer udvider arbejdsfeltet for *modellering* til mere avancerede modeller, end eleven ville kunne klare i hånden. De støtter eleven ved komplekse beregninger i *problemløsning* som led i længere ræsonnementer (som fx funktionsundersøgelse), som ellers ville blive for uoverskuelige eller vanskelige. Disse anvendelser skal eleven kunne udfolde selvstændigt, og de prøves ved den skriftlige prøves delprøve 2. Se yderligere præcisering heraf for enkelte kernestofområder i denne vejlednings afsnit 2.2. Kernestof.

Endelig skal eleverne lære at benytte digitale værktøjer til *formidling*. Som led i træning af mundtlig formidling kan eleverne eksempelvis sættes til at udarbejde screencasts om problemløsning. Et gruppearbejde kan munde ud i levering af et videoklip om et projekt eller et afgrænset fagområde, eller elevoplæg i et modul kan ledsages af præsentationsprogrammer.

Ud over de nævnte anvendelser, som læreplanen stiller krav om, giver digitale værktøjer nogle didaktiske muligheder, som underviseren kan vælge at udnytte. Værktøjerne kan være velegnede til at illustrere matematiske begreber. På kort tid kan man med digitale værktøjer eksempelvis producere eksempler, illustrationer, grafer mm., som giver en større forståelse for matematikken bag fx differentialkvotient eller et hældningsfelt for en første ordens differentialligning. Digitale værktøjer er desuden egnede til undersøgelser og eksperimentel undervisning, hvor eleverne selvstændigt bekræfter eller afkræfter matematiske påstande, som fx ved undersøgelse af generelle funktionsudtryk, hvor parametre varieres. Endelig kan digitale værktøjer kan hjælpe fagligt svage elever, som har problemer med basal matematik, til at komme et stykke vej i et fagområde, som måske ellers ville være utilgængeligt for en elev, der har faglige vanskeligheder ved fx grundlæggende bogstavregning.

At bruge digitale værktøjer kompetent kommer ikke af sig selv, og det er hensigtsmæssigt at introducere brugen tidligt og i forbindelse med det faglige arbejde med matematisk stof, når behovet opstår, så de nødvendige kompetencer kan blive rutine, og i en vekslen med arbejde med "blyant og papir", jf også afsnit 3.4 It.

Læreren bør inddrage digitale hjælpemidler i undervisningen, når det er hensigtsmæssigt. Det er ikke hensigtsmæssigt, at eleven i det væsentlige baserer sin forståelse af matematik på computerkommandoer i et digitalt værktøj, og digitale værktøjer bør ikke være en genvej til et facit, uden at eleven forstår den bagvedliggende matematik.

I grundforløbet, hvor lineære modeller skal behandles, kan man med fordel gennemgå lineær regression, og eleverne kan arbejde med skifte mellem repræsentationsformer med de digitale værktøjer.

Online spørgeskemaprogrammer kan benyttes til indhentning af anonyme data til statistiske undersøgelser.

Arbejde med algoritmer som Newtons metode eller Eulerintegration af differentialligninger kan oplagt understøttes med digitale værktøjer.

Ud over den brug af digitale værktøjer som specifikt hjælpemiddel i matematik, som læreplanen stipulerer, og som er omtalt ovenfor, kan diverse digitale værktøjer indgå efter underviserens didaktiske valg. Eksempelvis kan online quizprogrammer bruges som 'breaker', til afrunding af et emne eller som mere formaliseret led i den løbende evaluering af undervisningen og elevernes faglige udbytte.

Elevernes faglige læsning

Der skal tilrettelægges mindst ét forløb, hvor eleverne selvstændigt, under vejledning, arbejder med at læse og tilegne sig matematisk viden og indsigt.

Matematiske tekster i gymnasiet er ofte kendetegnet ved en kompakt sprogbrug og en logisk argumentation med udstrakt brug af symboler. Det stiller særlige krav til læsningen, som eleverne ikke kan honorere fra starten, og som må adresseres med gradvis stigende krav til omfang og selvstændighed.

Elevernes evne til at læse matematisk tekst ligesom andre "specielle" teksttyper har ikke alene betydning for senere uddannelse, men også for elevens arbejde i gymnasiet. Derfor er det en fordel, at et forløb med fokus på elevernes selvstændige læsning af matematisk tekst ligger så tilpas tidligt, at de kan nå at have glæde af udbyttet i resten af undervisningen i matematik.

Eleverne skal til en start forstå, at matematiske tekster stiller andre krav til læsningen, hvad fx angår tempo, refleksioner undervejs og genlæsning, end mange andre fag. Det kan være en fordel at indlægge progression i elevernes faglige læsning.

En sådan tilvænning til faglig læsning kan eksempelvis starte med, at

- elever i mindre grupper i klassen læser små eksempler, grafer eller mindre tekstbidder højt for hinanden,
- elever læser matematisk tekst, hvor det matematiske indhold er blevet behandlet i fællesskab først.

Senere kan man understøtte et mere selvstændigt arbejde for eleverne med læsning af matematisk tekst ved at

- supplere en lektie med en matematisk tekst med læsefokusspørgsmål,
- give vejledning til eller et overblik over tekstens indhold,
- give en formålsbeskrivelse med læsningen af den konkrete tekst,

så eleverne hjælpes, når de sidder alene med lektien.

Læreplanens omtale af "forløb" gælder ikke hele fagområder som fx trigonometri, men kan fint være en del af et større arbejde om et fagområde, eksempelvis ved at lade eleverne selvstændigt arbejde med sinusrelationerne som en del af arbejdet med trigonometri.

Matematisk sprogbrug

Det er hensigtsmæssigt, at eleverne gradvist indføres i matematisk sprogbrug, notation og krav til sproglig præcision. Læsning af andres matematiske tekster er en hjælp, men tilegnelsen af faget involverer egenproduktion. Matematik er grundlæggende et skriftligt fag, hvor næsten enhver mundtlig aktivitet suppleres af noget skriftligt i form af korte notater eller egentlig tekst. Eleverne skal derfor gennem hele matematik A-forløbet arbejde med selvstændigt at formulere sig skriftligt i matematik, så det bidrager til, at deres tankegang og sproglige præcision skærpes.

Man kan med fordel præsentere eleverne for forskellige fremstillinger af fx matematisk teori hentet fra forskellige lærebøger eller korte matematiske tekster fra artikler el.lign., så de opdager, at symbolsproget kan være forskelligt, på trods af at indholdet er det samme. Dette vil også kunne være en hjælp for de elever, der vælger at skrive studieretningsprojekt med matematik.

Eleverne møder mange nye fagudtryk i deres matematikundervisning, og de lærer først ordene at kende og erkender først betydningen af dem, når de prøver at anvende ordene i en eller anden form for matematisk kommunikation – skriftligt eller mundtligt. Den mundtlige dimension kan trænes ved fx at læse højt af matematiske tekster, præsentere et matematisk ræsonnement eller diskutere problembehandlingsstrategier.

Studie- og karriereperspektiv

Eleverne skal ifølge Lov om de gymnasiale uddannelser gennem undervisningen opnå viden om og erfaringer med fagenes anvendelse, der modner deres evne til at reflektere over egne muligheder og at træffe valg om egen fremtid i et studie-/ karriereperspektiv og et personligt perspektiv.

Studie- og karriereperspektivet kan naturligt inddrages i forbindelse med arbejdet med at understøtte elevernes opfyldelse af det faglige mål om at "undersøge problemstillinger og udvikle og vurdere løsninger".

I matematik A kan inddragelsen yderligere ske ved, at eleverne præsenteres for eksempler på, hvorledes matematikfaglige kompetencer kan anvendes i andre sammenhænge og på uddannelser og i professioner, hvor matematisk indsigt er en støtte. I det faglige samspil med andre fag får eleverne kendskab til, hvilke typer af spørgsmål matematik kan svare på, og en naturlig forlængelse heraf er at tale med eleverne om hvilke erhverv, der bl.a. beskæftiger sig med sådanne spørgsmål. Gennem mødet med fagets muligheder samt elevens egne refleksioner herover får eleverne en forståelse for egne karriereperspektiver og mulige uddannelsesvalg.

Gennem besøg på en videregående uddannelsesinstitution kan eleverne opleve det faglige miljø eksempelvis gennem et egnet fagligt oplæg og møde med studerende. På den måde kan der opbygges kendskab til videregående uddannelsers matematikfaglige indhold og studiemiljø.

På www.emu.dk er det muligt at læse mere om, hvordan man kan arbejde systematisk med specielt karrierelæring i gymnasiet – se Karrierelæring i gymnasiet - rapport, idekatalog og videoer.

SRP-forberedelse
Studieretningsprojektet er elevernes største faglige enkeltpræstation, og matematikundervisningen kan bidrage til såvel elevernes afklaring af fagvalg som det egentlige projektarbejde.

Det kan naturligt ske ved tidligt i matematik A-forløbet at inddrage enkelte elementer af flerfaglighed og senere lade holdet indgå i flerfaglige forløb.

Internt i matematik er der også mange muligheder. I arbejdet med problemløsning og matematisk modellering indgår naturligt, at eleverne lærer selvstændigt at formulere og besvare matematiske spørgsmål og opgaver i en kontekst uden for matematikken selv, og det kan hjælpe til at forberede eleverne på arbejdet med problemformulering i studieretningsprojektet.

For at forberede eleverne bør der også tilrettelægges aktiviteter, der giver eleverne mulighed for at kommunikere både skriftligt og mundtligt om flerfagligt arbejde med matematik, herunder redegøre for matematiske metoder i et sprog, som man også uden for faget kan forstå.

Eleverne bør i undervisningen se eksempler på emner for og titler på faktiske studieretningsprojekter og også gerne eksempler på besvarelser heraf, så det bliver tydeligere, hvordan kravene til denne typisk flerfaglige opgave er.

3.2 Arbejdsformer

Variation i undervisningen
Undervisningen skal tilrettelægges, så der er variation og progression i de benyttede arbejdsformer under hensyntagen til de mål, der ønskes nået med de enkelte forløb.

Der skal være en tydelig progression i valgene af arbejdsformer, så de medvirker til udviklingen fra elev til studerende. Dette gælder både omfanget af det selvstændige arbejde og graden af selvstændighed i arbejdet. I starten af det treårige forløb kan undervisningen med fordel tilrettelægges med udgangspunkt i kortere, lærerstyrede forløb, hvor eleverne stifter bekendtskab med de krav, som gælder for matematik i gymnasiet. Senere kan eleverne selv få ansvar for større eller mindre dele af forløbene, lige som der kan indgå fx en eksperimenterende tilgang til forskellige aspekter af faget.

Der skal indgå såvel mundtlige som skriftlige arbejdsformer i den daglige undervisning, som gør det muligt for den enkelte elev at udvikle kompetence til, individuelt og i samarbejde med andre, at tilegne sig matematisk indsigt.

Elevernes evne til individuelt at arbejde med matematiske problemstillinger skal udvikles ved, at de gradvist får mere og mere ansvar for deres selvstændige arbejde med stoffet hen over det samlede matematikforløb. I begyndelsen af forløbet gives grundig stilladsering til det stof, der skal bearbejdes, og de opgaver, der skal løses derhjemme.

På længere sigt er det hensigtsmæssigt at forpligte eleverne på selv individuelt eller i grupper at opnå den faglige erkendelse knyttet til det aktuelle stof, såvel i forbindelse med elevernes skriftlige produkter som i deres forberedelse af den daglige undervisning.

Skriftligt arbejde

Den skriftlige dimension skal medvirke til at sikre fordybelse i faget og omfatte problemløsning, arbejde med matematiske modeller og formidling af matematikfaglig argumentation og indsigt. Det skriftlige arbejde tilrettelægges med variation i formen, og så der er progression og sammenhæng med skriftligt arbejde i de øvrige fag, eleven har. Progressionen omfatter såvel fordybelsesgraden som kravene til elevernes selvstændige indsats.

Det skriftlige arbejde med problemløsning og modeller er centralt i forhold til at styrke elevernes tilegnelse af de behandlede faglige begreber og bringe nyt stof i sammenhæng med det allerede behandlede og skærpe brugen af faglig metode. Det er anledningen til at lære og beherske matematikkens symbol- og formelsprog, så fremstillingen er fagligt korrekt og dækkende.

Ved tilrettelæggelsen skal der sikres en progression, som forbereder arbejdet med studieretningsopgaven og studieretningsprojektet ved at giver eleverne mulighed for at prøve at formulere en sammenhængende fremstilling af et afgrænset fagligt emne.

Mundtligt arbejde

Eleverne skal arbejde med mundtlig kommunikation om matematiske emner med særligt henblik på matematisk argumentation og formidling.

Den mundtlige dimension har såvel interne som eksterne perspektiver. Internt bidrager arbejdet med at skærpe opmærksomheden om faglig præcision og argumentation, så eleverne gennem forløbet bliver i stand til selvstændigt at gennemføre behandling af matematisk teori. I det eksterne perspektiv indgår, at eleverne kan udtrykke sig om sagsforhold med matematisk indhold i andre faglige sammenhænge, eksempelvis tolkningen af modeller. I det flerfaglige samspil er formidling af matematisk indsigt et væsentligt fokuspunkt.

3.3 It

It og digitale værktøjer, herunder CAS-værktøjer, skal indgå i undervisningen i hensigtsmæssig vekslen mellem brug af digitale værktøjer og "blyant og papir".

Læreplanens afsnit om it anfører krav om, at eleverne skal have særlige digitale værktøjer til rådighed i matematik, der giver bestemte muligheder, og om, at eleverne skal undervises i brugen af disse værktøjer til arbejde i matematik. Den didaktiske brug af digitale værktøjer i matematik er bredere gennemgået i afsnit 3.1. Didaktiske principper. I afsnit 2.2. Kernestof gives enkelte præciseringer af kravene inden for forskellige fagområder i kernestoffet.

De digitale værktøjer, eleverne skal lære at bruge og forventes at have til rådighed ved den skriftlige delprøve 2, skal indeholde faciliteter til visualisering af funktioner, brug af regneark, numerisk løsning og generel symbolmanipulation med CAS. De digitale værktøjer skal understøtte undersøgende og dynamiske aktiviteter vedr. funktioner og geometri.

Læreplanen omtaler krav til de digitale værktøjer, eleverne skal have til rådighed. Brug af regneark omfatter opstilling af funktionstabeller, bestemmelse af statistiske deskriptorer for datasæt og regression samt understøttelse af arbejde med algoritmer som fx Newtons metode og Eulerintegration. Numerisk løsning omfatter numerisk løsning af ligninger og differentialligninger, jf. afsnit 2.2. Kernestof. Kravene til understøttelse af undersøgende og dynamiske aktiviteter vedr. funktioner omfatter dynamisk ændring af parametre i funktionsudtryk fx vha. "skydere", mens kravene vedr. geometri alene omfatter plangeometri.

Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af digitale værktøjer i matematik, der lever op til læreplanens krav, herunder at vælge digitale værktøjer, der kan benyttes praktisk til problemløsning i matematik ved de skriftlige prøver i faget.

Velovervejede, fælles beslutninger er væsentlige dels af hensyn til elever, der ønsker at opgradere fra et matematikniveau til det næste, dels for at sikre mulighederne for fagligt samarbejde på tværs af klasser og hold.

I undervisningen tilstræbes en tilpas vekselvirkning mellem det analoge og det digitale. It og digitale medier og værktøjer, herunder kunstig intelligens, benyttes, hvor det skønnes hensigtsmæssigt ift. elevernes læringsproces og digitale dannelse. I anvendelsen af it styrkes elevernes evne til at søge, udvælge og formidle relevant fagligt materiale samt til at forholde sig kritisk til de muligheder og begrænsninger, som digitale værktøjer, og produkter frembragt ved hjælp heraf, giver.

3.4 Samspil med andre fag

Undervisningen i matematik i grundforløbet skal koordineres med naturvidenskabeligt grundforløb.

Koordinationen omfatter såvel den tidsmæssige tilrettelæggelse af undervisningen som valget af fagligt indhold, jf. afsnit 3.1. Didaktiske principper, grundforløbet.

I studieretninger med matematik A skal der tilrettelægges forløb, hvor matematik og de øvrige studieretningsfag samarbejder om behandlingen af områder med relevans for begge fag. Der lægges vægt på koordinationen med de øvrige fag, der anvender matematik, idet det tilstræbes, at undervisningen i matematik understøtter anvendelsen, og eleverne oplever sammenhæng i den faglige udvikling.

Matematikkommissionen omtaler i sin afrapportering[4] fagligt samspil, dvs. matematik "på tværs" af anvendelsesfelter, som et centralt fokuspunkt i undervisningen.

Matematik er sit eget videnskabsfag. Men lige så væsentligt tilbyder matematik et universelt sprog, begrebsapparat og metodesæt, der er uundværligt i beskrivelse og analyse af sammenhænge og struktur i naturvidenskab, teknologi og samfundsvidenskab, og i samspillet sker en gensidig udvikling af fagene. Derfor er krav til fagligt samspil mellem matematik og de øvrige fag naturlige.

Samspillet med andre fag kan desuden bidrage til at skærpe elevernes opmærksomhed på, hvordan faget matematik ligner henholdsvis adskiller sig fra andre fag, og samspillet bidrager derigennem til en bredere forståelse for matematiks metoder og anvendelsesmuligheder.

Matematik skal som studieretningsfag indgå i et forpligtende samarbejde med de andre studieretningsfag. Læreplanerne i en række studieretningsfag (bioteknologi, fysik og kemi) stiller krav om særlige, fælles forløb. Sådanne fælles forløb kan i matematik A ofte indgå som del af det supplerende stof, jf. bemærkninger og eksempler i afsnit 2.3. Supplerende stof.

---

[4] Matematikkommissionen: "Afrapportering", Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling (2016)

I studieretningssamarbejdet indgår som minimum af koordination af de faglige forløb, at den relevante matematik så vidt muligt er behandlet i god tid før, de andre studieretningsfag skal bruge de faglige metoder. Det gælder eksempelvis dele af statistikken i forhold til samfundsfag A.

Brugen af digitale værktøjer kan med fordel være afstemt tidligt i forløbet, så såvel matematik som de andre fag kan have gavn af den fælles brug af dem.

Når matematik A optræder som valgfag, inddrages elevernes viden og kompetencer fra de andre fag, som eleverne hver især har eller har haft, så de bidrager til perspektivering af emnerne og belysning af fagets anvendelsesorienterede og almendannende sider.

I valgfaget matematik A kan anvendelsesorienteringen indgå gennem valget af eksempelmateriale og modeller fra andre fag, der behandles skriftligt eller mundtligt i undervisningen. Eleverne kan eksempelvis, afhængig af deres studieretning, bidrage med små faglige oplæg, som motiverer forskellige matematiske problemstillinger, som derefter udfoldes matematisk, og hvor resultaterne kan tolkes på basis af elevernes viden fra andre fag.

Der skal indgå tekster på engelsk.

Der benyttes det udvidede tekstbegreb, hvorefter tekster også omfatter eksempelvis youtube-videoklip, film, vodcasts etc.

Inddragelsen af fremmedsprogede tekster kan tydeliggøre for eleverne, at matematik er et internationalt fag, der udfolder sig på tværs af kulturelle og sproglige skel. Det matematikfaglige er meget langt hen ad vejen formuleret med samme symbol- og formelsprog, grafer etc., og kravene til argumentation er de samme.

Mange elever vil i forbindelse med informationssøgning i relation til anvendelse af matematik støde på engelske tekster, herunder fx i forbindelse med SRP, ligesom de på deres efterfølgende videre uddannelser ofte vil møde matematiske tekster på engelsk eller andre fremmedsprog. Derfor skal de møde sådanne fremmedsprogede (fortrinsvist engelske) matematiske tekster allerede i gymnasiet, så de får et vist indblik fx i betegnelsen af forskellige fagbegreber.

4 Evaluering

4.1 Løbende evaluering

I afslutningen af grundforløbet gennemføres en skriftlig screening af hensyn til vejledning af eleven om valg af studieretning. Screeningens faglige indhold er det stof, der er arbejdet med i grundforløbet på tidspunktet for screeningen, herunder lineære funktioner og modellering med lineære funktioner, jf. pkt. 3.1. Til screeningen gives ca. to timer. Opgavesættet omfatter opgaver, der afprøver den enkelte elevs matematiske kompetencer, færdigheder og viden med henblik på at kunne gennemføre matematik på C-, B- eller A-niveau.

Matematikscreeningen er individuel og anvendes til at få et indblik i, om den enkelte elev er i stand til at anvende det behandlede faglige stof til at løse forskellige typer af opgaver. Den skal ligge i den afsluttende del af grundforløbet, så både lærere og elever kan anvende resultatet heraf som led i lærernes vejledning hhv. elevernes endelige beslutning om valg af studieretning, herunder matematikniveau.

Det er ikke et krav, at screeningen bedømmes med en karakter. En formativ tilbagemelding, knyttet til elevens nødvendige indsats set i forhold til kommende valg af matematikniveau, kan være mindst lige så konstruktiv for elevens valgproces.

Skolen udarbejder selv screeningen i matematik og fastlægger i den forbindelse krav vedrørende elevernes brug af digitale værktøjer under screeningen. Kommunikation med omverdenen under screeningen er ikke tilladt.

Eleverne skal jævnligt aflevere skriftligt arbejde i form af opgavebesvarelser eller andre typer produkter, der evalueres formativt af læreren med henblik på at fremme den enkelte elevs faglige progression.

Et skriftligt arbejde skal altid have et eksplicit formål, som er klart for eleverne, og evalueringen af det skriftlige arbejde retter sig efter formålet og produktets type. Hvis det primære formål er at dokumentere elevens faglige niveau, så vil feedbacken ofte være i form af en karakter eller anden summativ bedømmelse (fx ud fra SOLO-taksonomien). Modsat vil man ved et formål om læring af ny matematik normalt lægge vægten på konkrete, fremadskuende anvisninger.

I forbindelse med skriftligt arbejde bør det tydeliggøres, hvorvidt eleverne skriver for at lære eller for at dokumentere deres viden, og hvad et eventuelt bedømmelsesgrundlag omfatter. Feedback på skriftligt arbejde bør tænkes individuelt og differentieret, så den enkelte elev kan opnå optimal læring. Den formative feedback bør være det dominerende i en væsentlig del af undervisningen frem mod det afsluttende niveau.

Elevernes arbejde med skriftlig problemløsning kan støttes ved at give hjælp undervejs i skriveprocessen frem for alene at give afsluttende kommentarer på et produkt. Navnlig arbejde, der munder ud i større skriftlige produkter, bør tilrettelægges, så eleverne får feedback på flere stadier i deres udarbejdelse af et produkt.

Elevernes udbytte af undervisningen skal evalueres løbende, særligt mht. argumentation, problemløsning og modellering. Herved tilvejebringes grundlag for en fremadrettet vejledning af den enkelte elev i arbejdet med at nå de faglige mål og for justering af undervisningen. Udvalgte forløb afsluttes med enten mundtlig fremlæggelse eller skriftlig prøve med henblik på træning af de respektive prøveformer, jf. pkt. 4.2.

Evaluering af det mundtlige faglige niveau foregår typisk via feedback på præstationer som fx mundtlige fremlæggelser (evt. video) eller som svar på spørgsmål i undervisningen. I enhver kommunikation med eleverne i klassen i form af klassedialog, gruppearbejde, elevfremlæggelse mv., hvor eleverne kommer med faglige input, giver læreren passende feedback (niveausvarende) med henblik på brug af fagbegreber og faglig præcision med det for øje, at eleverne skal lære et nyt sprog. I matematik er der oftest ét korrekt svar eller én præcis formulering af et svar, men elevbidrag bør anerkendes, så alle elever får mod på at deltage aktivt. Langt de fleste elevbidrag kan bruges positivt i vejen frem mod det størst mulige matematikfaglige udbytte for hver enkelt elev, og matematikkens præcise sprogbrug bør hele tiden udvikles i elevernes dialog med hinanden og med læreren.

I forbindelse med prøver, projektarbejde, mundtlige fremlæggelser eller andet selvstændigt arbejde kan det være hensigtsmæssigt at afholde korte, individuelle, formative evalueringssamtaler. Selvevaluering kan være et godt udgangspunkt for sådan en samtale, da eleverne ofte har god og realistisk vurdering af deres eget niveau.

Tests kan anvendes som evaluering af både mundtligt og skriftligt niveau. Evaluering af mundtligt niveau kan fx ske gennem en test med åbne, forståelsesrelaterede spørgsmål såsom "Hvad forstås ved en tangent til en graf?". Korte tests kan være uformelle og med et formativt sigte. Længerevarende tests på et helt modul kan ofte have et overvejende summativt sigte. Nogle tests vil læreren rette og bedømme, mens andre fx bedømmes af andre elever eller i fællesskab med holdets øvrige elever.

I det treårige forløb til A-niveau gennemføres mindst én intern prøve. Hvis der kun afholdes én intern prøve, skal det være en mundtlig, intern prøve efter andet år. Hvis der afholdes en intern prøve efter første år, skal det være en todelt skriftlig prøve, hvor der ved besvarelse af første delprøve ikke må benyttes andre hjælpemidler end en centralt udmeldt formelsamling, mens eleverne skal have adgang til alle hjælpemidler, herunder digitale værktøjer, under besvarelsen af anden delprøve.

Hvis skolen vælger, at eleverne kun skal til én intern prøve i matematik i det treårige forløb, så skal denne prøve være en mundtlig prøve efter det andet år. Eleverne opnår således gennem den interne prøve på andet år erfaringer med kravene forbundet med fagets mundtlige side.

Gennem en skriftlig terminsprøve i tredje år kan eleverne opnå erfaringer med kravene forbundet med fagets skriftlige side.

Mindst en af de mundtlige årsprøver, eleven møder i matematik, bør tilrettelægges efter de samme hovedprincipper, som den endelige mundtlige prøve på stx A-niveau, for at eleverne kan være godt forberedte på denne bestemte prøveform. Prøveformen bør strukturelt være den samme, men prøven kan indskrænkes i tid, så den svarer til en mundtlig individuel prøve i matematik på stx B-niveau, hvor der afsættes 24 minutters eksaminationstid (samt 24 minutters forberedelsestid) pr. elev. Prøven kan således for et sædvanligt hold med 28 elever afvikles over to dage.

Vælger skolen ud over de obligatoriske prøver at give eleverne på holdet en skriftlig intern prøve i matematik efter det første år, så tilrettelægges prøven todelt, og skolen fastsætter selv tiden til hver af de to delprøver.

For at sidestille elever, der opgraderer fra matematik på B-niveau til matematik på A-niveau i 3g, med elever, der har et samlet treårigt forløb til matematik på A-niveau, kan opgraderingseleverne givesen mundtlig, intern prøve som ovenfor beskrevet.

4.2 Prøveform

Der afholdes en centralt stillet skriftlig prøve og en mundtlig prøve.

4.2.1 Den skriftlige prøve

Der afholdes en skriftlig, todelt prøve på grundlag af et centralt stillet opgavesæt. Prøvens varighed er fem timer.

Første delprøve varer 3 timer. Anden delprøve varer 2 timer.

Ved første delprøve må kun en centralt udmeldt formelsamling for niveauet benyttes.

Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling ('ren', dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle niveau, som institutionen stiller til rådighed ved prøven.

Ved anden delprøve forudsættes, at eksaminanden råder over digitale værktøjer jf. pkt. 3.3.

Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler med de begrænsninger, der fremgår af eksamensbekendtgørelsen og udmøntningen heraf bl.a. i hjælpemiddeloversigten. Opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker digitale værktøjer, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3. It.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.

Om opgavesættene
Det faglige grundlag for opgaverne er det i pkt. 2.2. beskrevne kernestof, mens andre emner og problemstillinger kan inddrages, idet grundlaget så beskrives i opgaveteksten.

Enkelte områder i kernestoffet kan være undtaget fra delprøve 1 og/eller delprøve 2, jf. omtalen i afsnit 2.2. Kernestof.

De vejledende opgavesæt til niveauet illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, men udtømmer ikke mulighederne.

Der kan forekomme digitale bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget digitale værktøj, fx software til regression. Det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data fra Excel-regneark. Ved prøven i matematik A, stx, kan data udgøres af såvel heltal som decimaltal.

Om metodekrav
Der kan forekomme krav om, at en bestemt metode skal benyttes ved besvarelsen af en opgave. I det tilfælde, at en elev ikke har benyttet en krævet metode, vil en ellers korrekt besvarelse ikke give fuldt point.

Et eksempel på metodekrav kan være, at opgaven skal løses ved brug af en formel snarere end fx grafværktøj. Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er omvendt ikke i sig selv udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde.

Der skelnes mellem 'beregning' og 'aflæsning'. En formulering som 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…' betyder, at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'), mens formuleringen 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt med et digitalt værktøj.

I alle andre opgaver vil der være frit valg med hensyn til metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden digitale værktøjer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Det forventes desuden, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere for fx monotoniforhold ved hjælp af den afledede funktion. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens digitale værktøj giver et uventet svar.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille modeller ved regression, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre. Derfor vil den ønskede modeltype altid fremgå af opgaveteksten.

Om sprog og notation
Der anvendes som hovedregel decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53). I særlige tilfælde, hvor kommatal vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, benyttes decimalpunktum. Hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.

Hvis eksaminanderne bliver bedt om at tegne en model af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder størrelsesforhold.

Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indtegnes i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision, at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger.

Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum).

4.2.2 Den mundtlige prøve

Der afholdes en individuel, mundtlig prøve på grundlag af et fortrinsvis teoretisk eksamensspørgsmål med fokus på ræsonnement og bevisførelse inden for et valgt, overordnet emne.

Der stilles i alt mindst 14 forskellige eksamensspørgsmål, som til sammen i al væsentlighed dækker de faglige mål, kernestoffet samt det supplerende stof, heraf mindst ét med udgangspunkt i det supplerende stof. Eksamensspørgsmålene offentliggøres i god tid inden prøven.

Eksaminationstiden er ca. 30 minutter. Der gives ca. 30 minutters forberedelsestid. Prøven består af dels eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne eksamensspørgsmål, dels en uddybende faglig samtale mellem eksaminand og eksaminator med udgangspunkt i det overordnede emne.

Eksamensgrundlag: Undervisningsbeskrivelsen
Undervisningsbeskrivelsen danner grundlag for udarbejdelsen af de mundtlige eksamensspørgsmål. Undervisningsbeskrivelsens hovedformål er at sikre, at eleverne har den nødvendige information vedr. eksamen, og at censor kan forberede sig til at varetage sit hverv som censor. En undervisningsbeskrivelse skal som minimum indeholde:

1. Et kort resumé af hvert forløbs indhold og fokus, herunder forløbets centrale problemstillinger.
2. Angivelse af forløbets centrale faglige mål og kernestof / supplerende stof.
3. Det benyttede undervisningsmateriale.
4. Undervisningens tilrettelæggelse.

Emnets titel og anvendt undervisningsmateriale kan ikke alene gøre det ud for en beskrivelse af et forløb.

Eksamensspørgsmålenes antal
Kravet om, at der skal stilles mindst 14 forskellige eksamensspørgsmål, gælder uanset holdstørrelsen. Ifølge eksamensbekendtgørelsen skal der være så mange trækningsmuligheder, at sidste eksaminand har mindst fire at vælge mellem. For at opfylde begge krav kan det være nødvendigt, at alle eksamensspørgsmål forekommer flere gange i den samlede pulje, som lægges frem ved prøvens start. Ved sådan gentagelse skal alle eksamensspørgsmålene gentages lige ofte.

Eksamensspørgsmålenes udformning
Det enkelte eksamensspørgsmål udformes med en overskrift og et eller flere underpunkter.

Overskriften angiver det overordnede emne for eksaminationen og fastlægger rammen for den uddybende, faglige samtale. For så vidt angår kernestoffet kan man som det enkelte eksamensspørgsmåls overordnede emne eksempelvis bruge læreplanens overskrifter for de relevante kernestofområder (fx "trigonometri og vektorregning" eller "differentialligninger") eller titlen på et projekt, holdet har arbejdet med. For eksamensspørgsmål, der tager udgangspunkt i det supplerende stof, må der formuleres en tilsvarende bred overskrift, så eksaminanden har mulighed for at demonstrere såvel faglig bredde som dybde i sin beherskelse af emnet.

De uddybende underpunkter udpeger centrale elementer, som forventes at indgå i eksaminandens selvstændige fremlæggelse af emnet. De kan dog hverken fungere som en tjekliste for eksaminator eller censor eller være en forpligtende disposition for eksaminanden.

Eksamensspørgsmålet skal gøre det muligt for eksaminanden at demonstrere sin grad af opfyldelse af de relevante faglige mål, herunder beherskelsen af det faglige indhold i det overordnede emne, uanset niveauet af præstationen, jf. gennemgangen i afsnit 4.3. Bedømmelseskriterier.

Eksamensspørgsmålene skal så vidt muligt være ækvivalente i omfang og sværhedsgrad.

Eksamensspørgsmålene skal tilsammen i al væsentlighed dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof.

Der stilles mindst ét eksamensspørgsmål med udgangspunkt i det supplerende stof.

Særligt for treårige hold til A-niveau
For treårige hold til A-niveau må eksamensspørgsmål, der vedrører kernestof fra tidlige forløb, om fornødent forstærkes med indhold eller metode fra den senere undervisning, så de i omfang og sværhedsgrad er ækvivalente med eksamensspørgsmål fra sidst i undervisningen. Eksempelvis kan et eksamensspørgsmål om vækstmodeller suppleres med indhold vedr. differentialligninger, eller et eksamensspørgsmål i trigonometri kan suppleres med krav vedr. vektorregning.

Særligt for étårige hold til A-niveau
For étårige hold til A-niveau må eksamensspørgsmål, der omfatter stof fra underliggende niveau, om fornødent forstærkes med indhold eller metode fra det étårige hold, så eksamensspørgsmålene i omfang og sværhedsgrad fra hele stofområdet på A-niveau kan være ækvivalente. Da der i matematik A, stx, stilles højere krav til ræsonnement og bevisførelse end i matematik B, er det nødvendigt at være særligt opmærksom på, hvordan stof fra B-niveau indgår i eksamensspørgsmålene.

I den forbindelse kan man med fordel inddrage det forløb, der er gennemgået i det supplerende stof på det etårige hold til A-niveau med sigte på faglig konsolidering af stoffet fra B-niveau svarende til A-niveauets krav til argumentation og abstraktion, hvor hovedvægen har været på navnlig beviser for regnereglerne for differentialkvotienter, jf. afsnit 2.3. Supplerende stof, Særligt for étårige hold til A-niveau. Man kan også benytte sig af, at hold i matematik B, stx eller hf, har arbejdet med bestemte dele af kernestoffet med særligt henblik på argumentation, jf. 3.1 Didaktiske principper, Særligt for étårige hold til A-niveau.

På étårige hold til A-niveau er det tilstrækkeligt, at supplerende stof gennemgået på det étårige hold indgår i eksamensspørgsmålene.

Særligt om sprogbrug
Et krav om "redegørelse" for en given påstand svarer i matematik til det højeste taksonomiske niveau forstået på den måde, at kravet vil være en gennemgang af et bestemt bevis eller en udledning af et bestemt udtryk gennem en logisk følge af matematiske ræsonnementer. Ordet er således ækvivalent med ord som "bevis" eller "udled".

Et krav om en "forklaring" på, hvad en given påstand går ud på, er på et lavere taksonomisk niveau og indebærer ikke, at eksaminanden beviser eller udleder noget, men i stedet forklarer påstandens betydning eller anvendelse.

Ord som "fortæl om" eller lignende, der ikke er klare i deres kravspecifikation, bør undgås. Det samme gælder udtryk som "du kan eventuelt komme ind på..." eller "hvis der er tid, kan du...".

Før prøven
Principperne for udformning af eksamensspørgsmål skal drøftes med eleverne som led i undervisningen, fx ved at gennemgå eksempler på mulige eksamensspørgsmål inden for såvel kernestof som supplerende stof, sådan at det bliver klart for dem præcis hvilke krav, en bestemt formulering dækker over. Eksempelvis bør det omtales, at det hører med til en fyldestgørende præsentation af en sætning og dens bevis at gøre rede for sætningens forudsætninger.

Et udkast til eksamensspørgsmålene offentliggøres så vidt muligt i god tid før prøven og senest en uge før prøvens afholdelse. Eksaminator og censor indgår i et samarbejde om, at eventuelle uklarheder i eksamensspørgsmålene ryddes af vejen inden prøven.

Under prøven
Tildeling af et eksamensspørgsmål til den enkelte eksaminand foregår ved lodtrækning. Alle trækningsmuligheder, dvs. eksamensspørgsmål med eventuelle gentagelser, lægges frem fra starten af første prøvedag.

I forberedelsestiden må eksaminanden benytte alle hjælpemidler med de begrænsninger, der fremgår af eksamensbekendtgørelsen og udmøntning heraf.

Der afsættes omtrent samme tid til eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne eksamensspørgsmål som til den uddybende faglige samtale mellem eksaminand og eksaminator.

Eksaminanden disponerer som udgangspunkt selv sin behandling af eksamensspørgsmålets faglige indhold inkl. behandling af eksamensspørgsmålets underpunkter.

Normalt foregår eksaminationen ved en tavle, hvor eksaminanden 'fører pennen' og har sine notater i nærheden, og en computer kan inddrages, hvor det er relevant i den faglige sammenhæng.

Eksaminanden må under sin præsentation gerne støtte sig til egne noter og notater fra forberedelsestiden. Oplæsning eller afskrift direkte fra noter eller læremidler tæller ikke i sig selv positivt i bedømmelsen. Det er en del af den forudgående undervisning, at eleverne arbejder med at frigøre sig fra eventuelle notater og lignende under en mundtlig præsentation af et fagligt stof. Eleverne skal før prøven informeres om, at det ikke tæller positivt at læse op eller være meget nært knyttet til noter m.v.

Den uddybende faglige samtale kan tage udgangspunkt i elementer fra eksaminandens egen præsentation, som eksempelvis giver eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelsesmuligheder, perspektivering eller overblik over eksamensspørgsmålets overordnede emne. Under samtaledelen kan det ikke være et krav, at eksaminanden giver bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem.

4.3 Bedømmelseskriterier

Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilken grad eksaminandens præstation opfylder de faglige mål, som de er angivet i pkt. 2.1. I såvel den skriftlige som den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse af eksaminandens præstation.

4.3.1 Den skriftlige prøve

Ved den skriftlige prøve lægges der vægt på eksaminandens evne til at

- *anvende et bredt udvalg af matematiske begreber, teorier og metoder i problemløsning og modellering*
- *forstå og anvende matematisk symbol- og formelsprog*
- *vælge, benytte og oversætte mellem repræsentationer af matematiske objekter*
- *anvende digitale værktøjer til modellering og matematisk problemløsning*
- *opstille, bearbejde og fortolke matematiske modeller til beskrivelse af fænomener inden for forskellige fagområder samt diskutere modellers anvendelse og rækkevidde*
- *læse og bearbejde tekster med matematikfagligt indhold*
- *formidle emner med matematikfagligt indhold.*

Bedømmelse af besvarelsen af skriftlig prøve
Bedømmelseskriterierne ovenfor har udgangspunkt i de faglige mål med de justeringer, som prøvens format nødvendiggør.

Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte, centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås i hver af de to delprøver.

De karakterer, som censorerne afgiver, er ikke alene et resultat af en pointsammentælling. På grundlag af det samlede pointtal for besvarelsen tildeles en foreløbig karakter. Derpå foretages en vurdering af besvarelsen som helhed, hvorefter den endelige karakter fastsættes som vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation demonstrerer opfyldelse af de relevante faglige mål, jf. bedømmelseskriterierne ovenfor.

Helhedsvurderingen skal afspejle, at eksaminanden behersker det faglige stof i bredde *og* dybde og formidler sin tankegang og faglig metode klart. Desuden skal besvarelsen være præget af matematisk korrekthed og indeholde besvarelse af såvel opgaver med "blyant og papir" som med computer.

Forventningerne til formidlingen af besvarelsen af delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening for opgaver i delprøve 1, mens der i delprøve 2 i stedet er forventning om dokumentation af matematiske overvejelser i brugen af de digitale værktøjer.

En helt summarisk besvarelse af et opgavesæt vil, selv hvis den i alt væsentligt giver de korrekte svar, ikke være en tilstrækkelig demonstration af eksaminandens mulige opfyldelse af de faglige mål, jf. de detaljerede bedømmelseskriterier ovenfor. For at støtte eksaminanden i at skrive en besvarelse, der er så detaljeret formidlet, at den kan demonstrere opfyldelsen af de faglige mål, er nedenstående tekst indsat i begyndelsen af hvert prøvesæt:

> For at du kan vise, at du opfylder de faglige mål med matematikundervisningen, er det vigtigt, at din besvarelse formidler din løsning af opgaven klart, og at din tankegang fremgår tydeligt. Du bør derfor i besvarelsen af hvert spørgsmål lægge vægt på:
>
> *Præsentation*
> Spørgsmålets matematiske indhold præsenteres.

Dokumentation
Ved regning i hånden skal du vise mellemregninger. Ved brug af digitale værktøjer skal du forklare din brug af det digitale værktøj.

Figurer
Figurer og grafer, du udarbejder, skal være tydelige og vise relevant information for besvarelsen.

Konklusion
Besvarelsen af spørgsmålet skal indeholde en tydelig konklusion.

Nogle eksaminander kan af praktiske grunde vælge at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges med et digitalt værktøj. Sådan en ubearbejdet gengivelse af opgavens tekst udgør ikke en præsentation.

I afsnit 5.1.2 findes en karakterbeskrivelse til bedømmelsen af præstationer ved den skriftlige prøve, udtrykt ved karaktererne 12, 7 og 02.

4.3.2 Den mundtlige prøve

Ved den mundtlige prøve lægges der vægt på eksaminandens evne til at

- *redegøre for grundlæggende matematiske begreber, teorier og metoder*
- *gennemføre matematiske ræsonnementer og derigennem demonstrere kendskab til opbygningen af matematisk teori*
- *forstå og anvende matematisk symbol- og formelsprog*
- *formidle et emne med et matematikfagligt indhold.*

Karakteren for præstationen ved den mundtlige prøve er en helhedsvurdering. Ved bedømmelse af eksaminandens præstation skal eksaminandens matematiske færdigheder og kompetencer afvejes i overensstemmelse med bedømmelseskriterierne for at nå frem til helhedsvurderingen.

I afsnit 5.1.3 findes en karakterbeskrivelse til bedømmelsen af præstationer ved den mundtlige prøve, udtrykt ved karaktererne 12, 7 og 02.

5 Bilag

5.1 Karakterbeskrivelser

5.1.1 Oversigt over karakterskalaen

Karakter	Betegnelse	Beskrivelse
12	Fremragende	Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler.
7	God	Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler.
02	Tilstrækkelig	Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål.

5.1.2 Karakterbeskrivelser: Skriftlige besvarelser

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt.

Eksaminanden...	**12**	**7**	**02**
Dybde/ kompleksitet/ ræsonnement	- kan opstille og tolke modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om opstilling og tolkning af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ terminologi/ fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, hvor tankegangen fremgår klart.	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog.	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ overblik/ perspektiv	- er i stand til at anvende digitale værktøjer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler.	- er i stand til at anvende digitale værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter.	- kan anvende digitale værktøjer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter.

5.1.3 Karakterbeskrivelser: Mundtlige besvarelser

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål.

Eksaminan-den...	**12**	**7**	**02**
Dybde/ kompleksitet/ ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teoribygning.	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et foreliggende matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et matematisk ræsonnement.	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement.
Sprog/ terminologi/ fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig i et klart sprog med ubesværet anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi.	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ overblik/ perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.

BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET