



# VEJLEDENDE ENKELTOPGAVER

Stx matematik A-niveau

December 2025

## Forord til vejledende enkeltopgaver, stx A, december 2025

Grundlaget for de skriftlige prøver i matematik stx A er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning, de vejledende og de stillede opgavesæt ved de skriftlige prøver.

Denne samling af vejledende enkeltopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et supplerende materiale til støtte for undervisningen frem mod de skriftlige prøver. Opgaverne i denne samling viser, hvordan både nye og gamle emner kan komme til udtryk i henhold til 2024-læreplanen.

Opgavesamlingen udgør *ikke en udtømmende* beskrivelse af de opgavetyper, der kan og vil blive stillet ved de kommende skriftlige prøver, men repræsenterer en række forskelligartede måder, hvorpå et emne kan optræde i opgaver ved den skriftlige prøve. Antallet af opgaver inden for et bestemt emne er *ikke udtryk for en vægtning af det pågældende emne*. Opgavesamlingen er heller *ikke et udtryk for forholdet mellem lette og svære opgaver* i et prøvesæt.

Opgavesamlingen er udarbejdet af opgavekommissionen for matematik stx med støtte fra Matematiklærerforeningen.

# Indholdsfortegnelse

## Indhold

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 1. Opgave 1-spørgsmål .....                    | 3   |
| 2. Tal og algebra .....                        | 24  |
| Delprøve 1 .....                               | 24  |
| Delprøve 2 .....                               | 30  |
| 3. Geometri .....                              | 32  |
| Delprøve 1 .....                               | 32  |
| 4. Analytisk plangeometri .....                | 38  |
| Delprøve 1 .....                               | 38  |
| Delprøve 2 .....                               | 56  |
| 5. Analytisk rumgeometri .....                 | 64  |
| Delprøve 1 .....                               | 64  |
| Delprøve 2 .....                               | 70  |
| 6. Funktioner og differentialregning .....     | 74  |
| Delprøve 1 .....                               | 74  |
| Delprøve 2 .....                               | 97  |
| 7. Integralregning .....                       | 114 |
| Delprøve 1 .....                               | 114 |
| Delprøve 2 .....                               | 122 |
| 8. Differentialligninger .....                 | 130 |
| Delprøve 1 .....                               | 130 |
| Delprøve 2 .....                               | 135 |
| 9. Kombinatorik og sandsynlighedsregning ..... | 140 |
| Delprøve 1 .....                               | 140 |
| Delprøve 2 .....                               | 150 |

## 1. Opgave 1-spørgsmål

1.D1.1

a) Løs følgende ligning ved hjælp af ligningsregler

$$4 \cdot (x - 3) = 32 .$$

1.D1.2

a) Løs følgende ligning ved hjælp af ligningsregler

$$\frac{x + 14}{2} = 10 .$$

1.D1.3

a) Undersøg, om  $x = 3$  er en løsning til ligningen

$$5 \cdot (x - 1) = x + 7 .$$

1.D1.4

Der er givet formlen

$$W = \frac{\sqrt{U + V}}{5} .$$

a) Bestem  $W$ , hvis  $U = 60$  og  $V = 40$ .

1.D1.5

a) Reducér udtrykket

$$a^3 \cdot a^5 .$$

1.D1.6

a) Reducér udtrykket

$$\frac{a^7}{a^2} .$$

1.D1.7

a) Reducér udtrykket

$$2 \cdot (a - 3) .$$

1.D1.8

a) Reducér udtrykket

$$(5 - b)^2 .$$

1.D1.9

a) Isolér  $T$  i udtrykket

$$3 \cdot S + T = 5 .$$

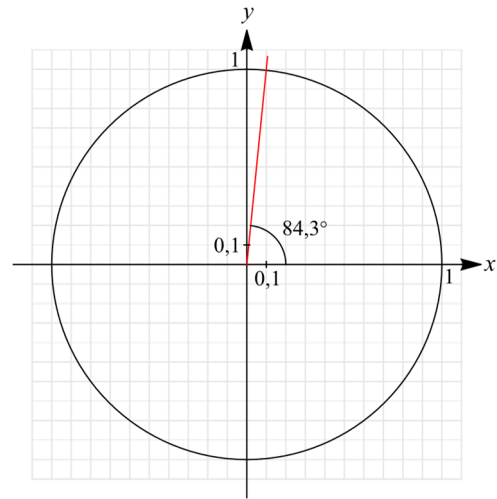


1. Opgave 1-spørgsmål

1.D1.10

Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på  $84,3^\circ$  er indtegnet.

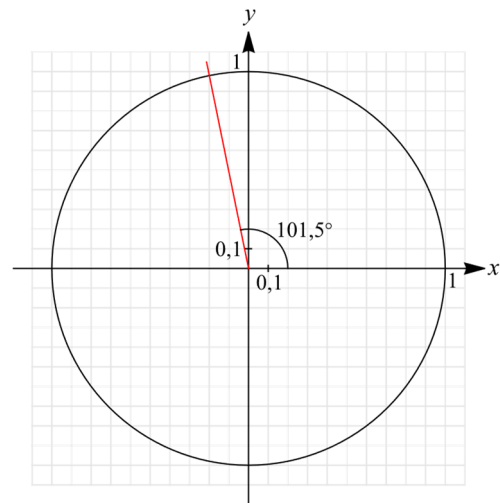
- a) Bestem  $\cos(84,3^\circ)$ .  
Brug bilaget.



1.D1.11

Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på  $101,5^\circ$  er indtegnet.

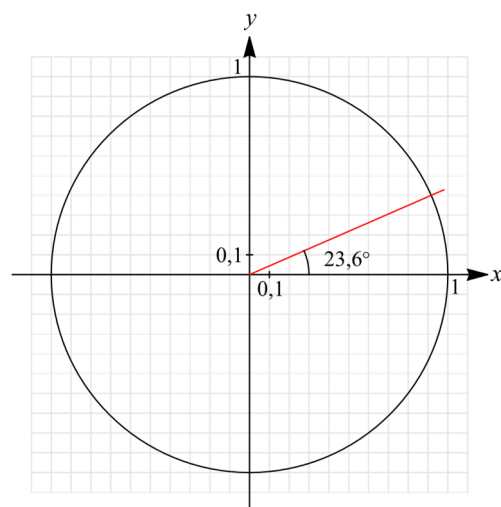
- a) Bestem  $\cos(101,5^\circ)$ .  
Brug bilaget.



1.D1.12

Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på  $23,6^\circ$  er indtegnet.

- a) Bestem  $\sin(23,6^\circ)$ .  
Brug bilaget.

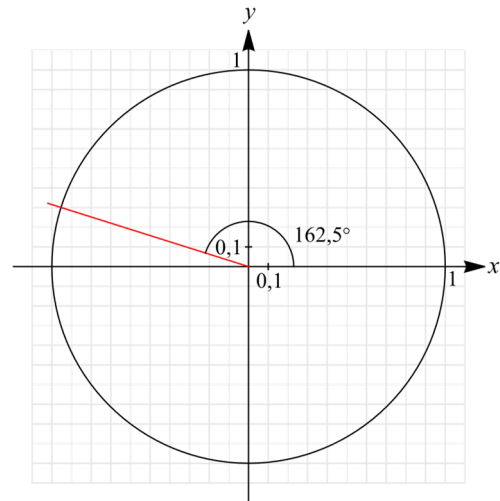


1. Opgave 1-spørgsmål

1.D1.13

Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på  $162,5^\circ$  er indtegnet.

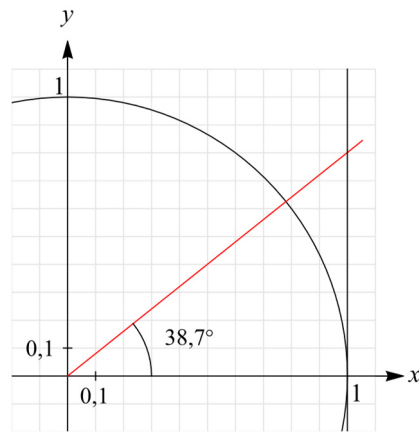
- a) Bestem  $\sin(162,5^\circ)$ .  
Brug bilaget.



1.D1.14

Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på  $38,7^\circ$  er indtegnet.

- a) Bestem  $\tan(38,7^\circ)$ .  
Brug bilaget.



1.D1.15

To punkter  $P$  og  $Q$  er givet ved

$$P(1,3) \text{ og } Q(10,5).$$

- a) Bestem koordinatsættet til vektor  $\overrightarrow{PQ}$ .

1.D1.16

En vektor  $\vec{a}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Tegn vektor  $\vec{a}$ . Brug bilaget.

## 1. Opgave 1-spørgsmål

**1.D1.17** En vektor  $\vec{a}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til tværvektoren  $\hat{\vec{a}}$  til vektor  $\vec{a}$ .

**1.D1.18** En vektor  $\vec{a}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $3 \cdot \vec{a}$ .

**1.D1.19** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{a} - \vec{b}$ .

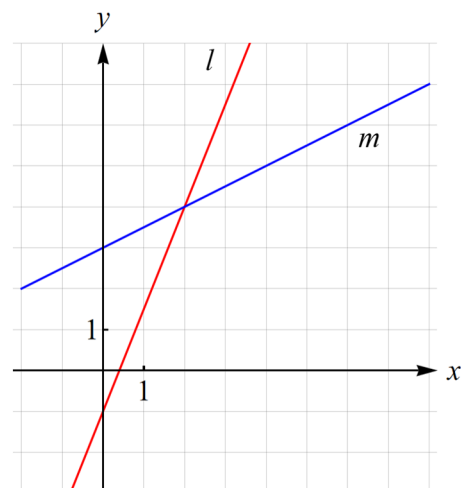
**1.D1.20** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem skalarproduktet  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

**1.D1.21** På figuren ses to linjer  $l$  og  $m$ .

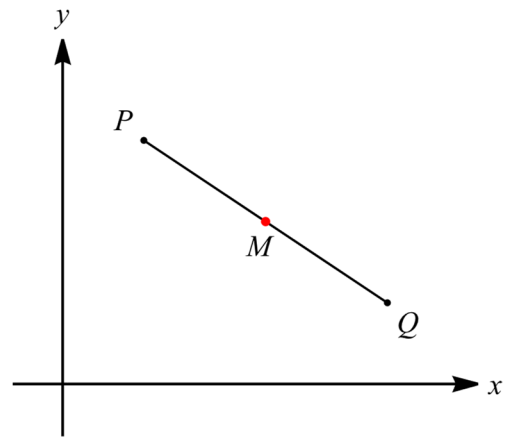
a) Aflæs koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer. Brug bilaget.



1. Opgave 1-spørgsmål

**1.D1.22** I et koordinatsystem er punkterne  $P(2,6)$  og  $Q(8,2)$  givet.

- a) Bestem koordinatsættet til midtpunktet  $M$  for linjestykket  $PQ$ .



**1.D1.23** En linje  $l$  har hældningen  $-3$ , og en linje  $m$  har hældningen  $\frac{1}{2}$ .

- a) Vis, at linjerne  $l$  og  $m$  ikke er ortogonale.

**1.D1.24** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

- a) Bestem koordinatsættet til cirkelns centrum.

**1.D1.25** En cirkel er givet ved ligningen

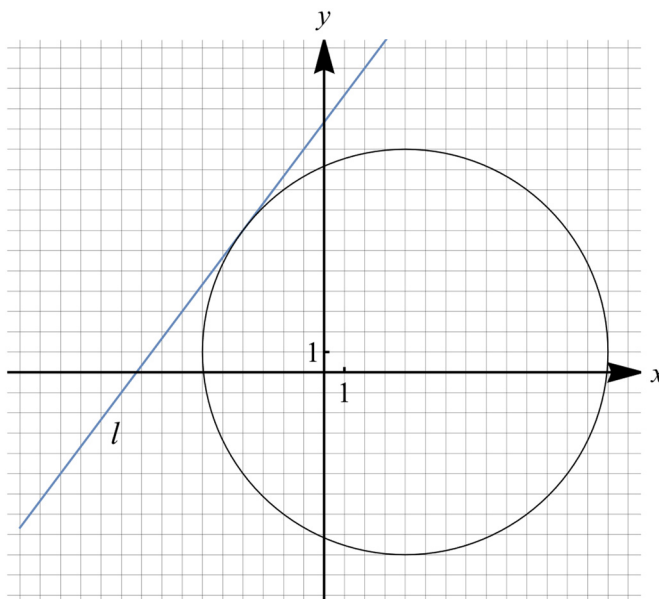
$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9.$$

- a) Bestem cirkelns radius.

**1.D1.26** En cirkel har centrum i punktet  $C(4,2)$  og radius 10.

- a) Opskriv en ligning for cirklen.

1.D1.27



På figuren ses en linje  $l$  og en cirkel.

Linjen er tangent til cirklen.

- a) Aflæs koordinatsættet til det punkt, hvor linjen rører cirklen.  
Brug bilaget.

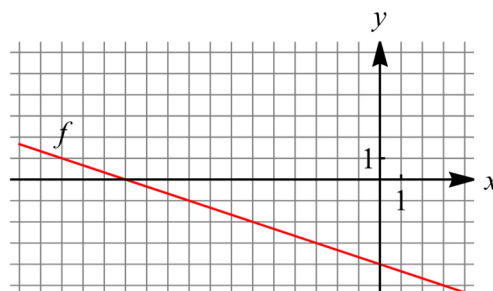
1.D1.28

En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = a \cdot x - 4, \text{ hvor } a \text{ er et tal.}$$

På figuren ses grafen for  $f$ .

- a) Bestem tallet  $a$ .  
Brug bilaget.



1.D1.29

En linje  $l$  er givet ligningen

$$l: y = a \cdot x + b.$$

Linjen har hældningen  $a = 5$  og går gennem punktet  $P(1, 7)$ .

- a) Bestem tallet  $b$ .

1.D1.30

En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 6x - 29.$$

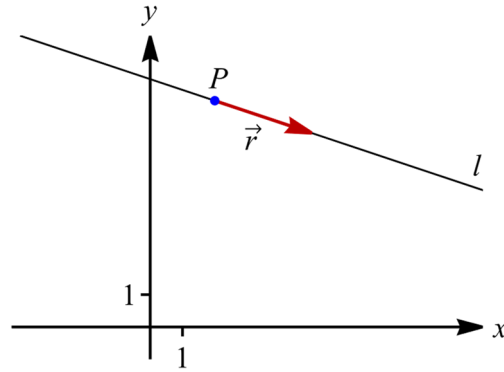
- a) Undersøg, om punktet  $P(7, 15)$  ligger på linjen  $l$ .

**1.D1.31** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en retningsvektor for  $l$ .

**1.D1.32**



En linje  $l$  går gennem punktet  $P(2, 7)$ .

Vektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  er en retningsvektor for  $l$ .

a) Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .

**1.D1.33** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: 6x + 4y - 7 = 0.$$

a) Bestem en normalvektor til  $l$ .

**1.D1.34** To punkter  $P$  og  $Q$  er givet ved

$$P(3, 6, 10) \text{ og } Q(5, 7, 14).$$

a) Bestem koordinatsættet til vektor  $\overrightarrow{PQ}$ .

**1.D1.35** En vektor  $\vec{a}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $5 \cdot \vec{a}$ .

**1.D1.36** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**1.D1.37** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en retningsvektor for  $l$ .

**1.D1.38** En linje  $l$  går gennem punktet  $P(6,0,-2)$  og har retningsvektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen  $l$ .

**1.D1.39** En plan  $\alpha$  er givet ved ligningen

$$\alpha: 3x - 2y + 5z - 8 = 0.$$

a) Bestem en normalvektor til  $\alpha$ .

**1.D1.40** En kugle er givet ved ligningen

$$(x-4)^2 + (y-8)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

a) Bestem koordinatsættet til kuglens centrum.

**1.D1.41** En kugle har centrum i punktet  $C(1,2,5)$  og radius 9.

a) Opskriv en ligning for kuglen.

**1.D1.42** En akties pris er steget fra 200 kr. til 250 kr.

a) Bestem den procentvise stigning i aktiens pris.

## 1. Opgave 1-spørgsmål

**1.D1.43** Christian indsætter et beløb på en konto i en bank til en fast årlig rente på 3,2 %.

- a) Bestem den tilhørende fremskrivningsfaktor.

**1.D1.44**



Billedkilde: pixabay

Beløbet på en bankkonto med en fast årlig procentvis rente kan beskrives ved formelen

$$K = 19000 \cdot 1,02^n,$$

hvor  $K$  er beløbets størrelse, målt i kr., og  $n$  er antal år, efter at beløbet blev indsat.

- a) Gør rede for betydningen af tallet 19000 i formlen.

**1.D1.45** Jesper træner i det lokale fitnesscenter.

Den samlede pris, som Jesper skal betale for medlemskab og brug af fitnesscentret i et år, kan beskrives ved

$$f(x) = 35x + 1200,$$

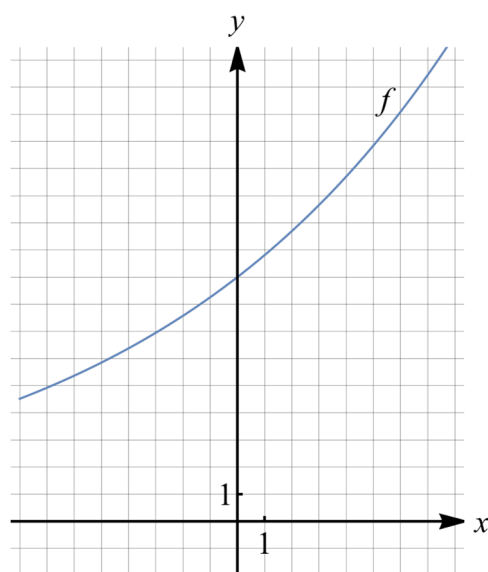
hvor  $f(x)$  er den samlede pris (målt i kr.), og  $x$  er det antal gange, Jesper har benyttet centret i løbet af året.

- a) Hvad fortæller tallet 35 om Jespers udgifter til fitnesscenteret?

**1.D1.46** Figuren viser grafen for en eksponentiel udvikling  $f$  givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

- a) Bestem tallet  $b$ .  
Brug bilaget.





## 1. Opgave 1-spørgsmål

**1.D1.47** En eksponentiel udvikling  $f$  er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot 1,47^x.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem grafen for  $f$  og  $y$ -aksen.

**1.D1.48** For en bestemt web-shop kan udviklingen i den årlige omsætning beskrives ved

$$f(x) = 2,7 \cdot 1,16^x,$$

hvor  $f(x)$  er den årlige omsætning (målt i mio. kr.), og  $x$  er antal år efter 2020.

- a) Hvad fortæller tallet 1,16 om udviklingen i web-shoppens omsætning?

**1.D1.49** Mængden af koffein i en persons krop efter at have drukket en kop kaffe kan beskrives ved

$$f(x) = 200 \cdot 0,87^x,$$

hvor  $f(x)$  er koffeinnmængden (målt i mg), og  $x$  er antallet af timer, efter at kaffen blev drukket.

- a) Hvad fortæller tallet 0,87 om udviklingen i koffeinnmængden i personens krop?

**1.D1.50** Produktionen af en bestemt vare i en virksomhed kan beskrives ved en model  $f$  givet ved

$$f(x) = 1300 \cdot 0,96^x,$$

hvor  $f(x)$  er mængden af den producerede vare, og  $x$  er antal år efter 2017.

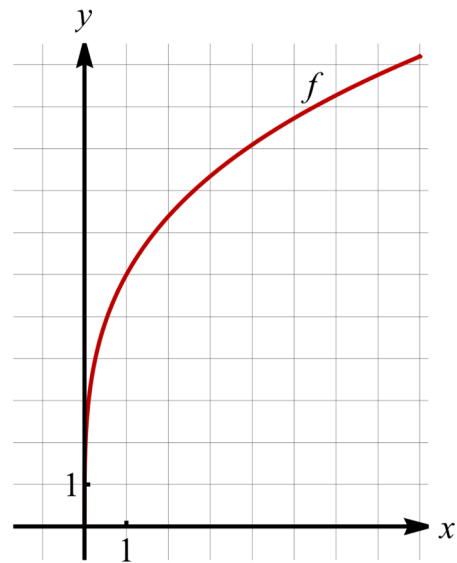
- a) Har virksomhedens produktion af varen været voksende eller aftagende efter 2017? Begrund svaret.

1.D1.51

Figuren viser grafen for en potensfunktion  $f$  givet ved

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

- a) Bestem tallet  $b$ .  
Brug bilaget.



1.D1.52

En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 1.$$

- a) Bestem koordinatsættet til parablens skæringspunkt med  $y$ -aksen.

1.D1.53

En parabel er graf for et andengradspolynomium  $f$  givet ved

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 1.$$

- a) Bestem  $x$ -koordinaten til parablens toppunkt.

1.D1.54

Et andengradspolynomium  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3.$$

- a) Bestem diskriminanten  $d$ .

1.D1.55

Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 5.$$

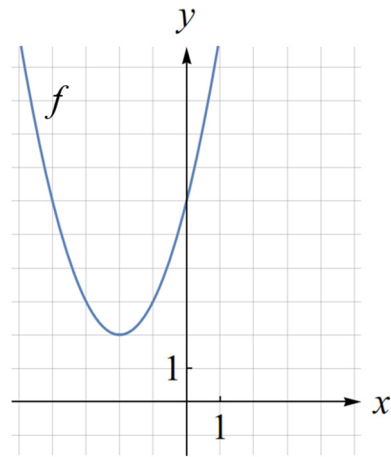
- a) Undersøg, om  $x = 3$  er nulpunkt i  $f(x)$ .

1.D1.56

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$  bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

- a) Aflæs tallet  $c$ .  
Brug bilaget.

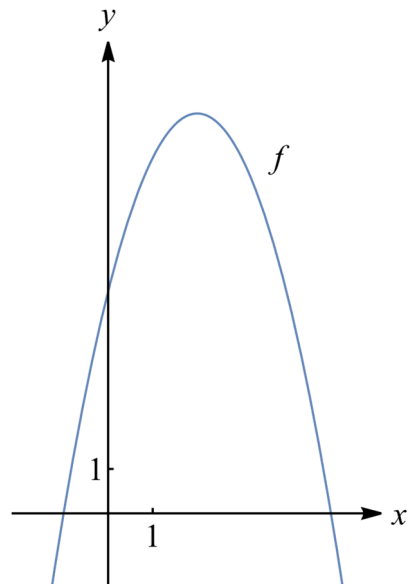


1.D1.57

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$  bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

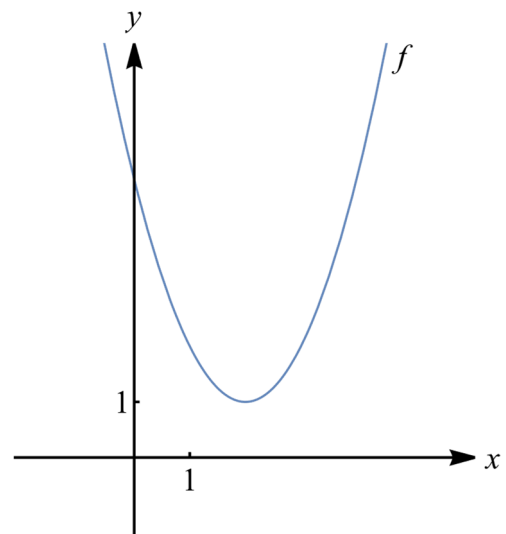
- a) Bestem fortegnet for tallet  $a$ .



1.D1.58

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$  med diskriminant  $d$ .

- a) Bestem fortegnet for tallet  $d$ .

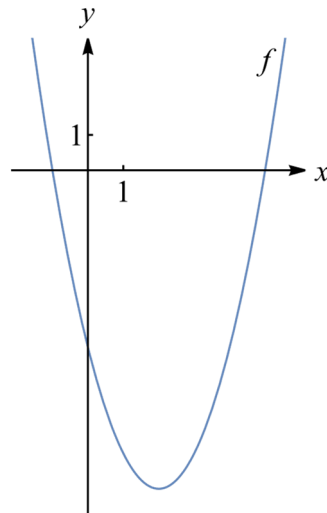


1.D1.59

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$  bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

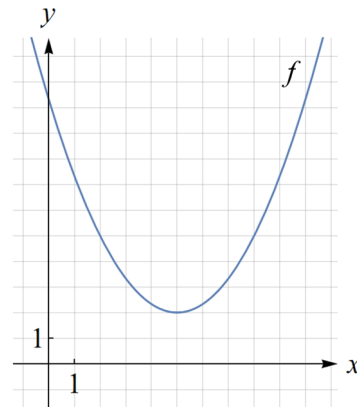
- a) Bestem fortegnet for tallet  $b$ .  
Brug bilaget.



1.D1.60

Figuren viser en parabel.

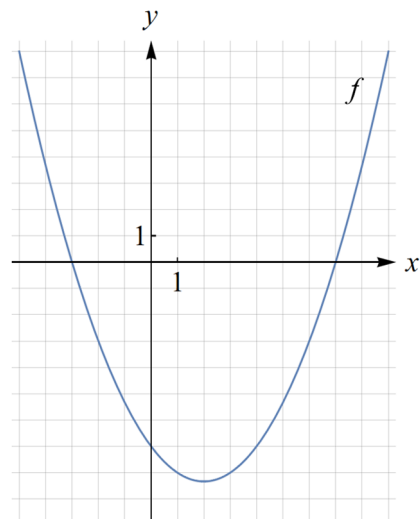
- a) Aflæs koordinatsættet til parablens toppunkt.  
Brug bilaget.



1.D1.61

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$ .

- a) Aflæs rødderne i  $f$ .  
Brug bilaget.



**1.D1.62** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 + 4x - 15.$$

a) Bestem  $f(3)$ .

**1.D1.63** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = \ln(x) + x.$$

a) Bestem  $f(1)$ .

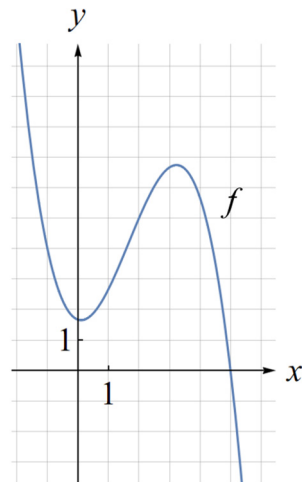
**1.D1.64** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^3.$$

a) Bestem  $f(2)$ .

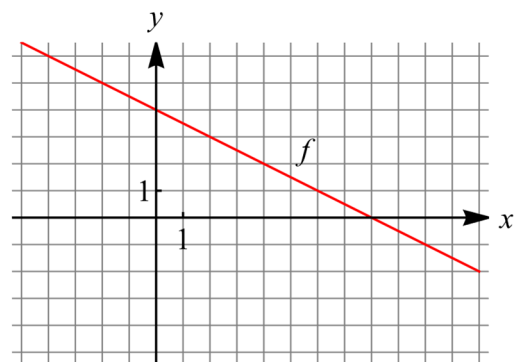
**1.D1.65** På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

a) Bestem  $f(2)$ .  
Brug bilaget.



**1.D1.66** På figuren ses grafen for en lineær funktion  $f$ .

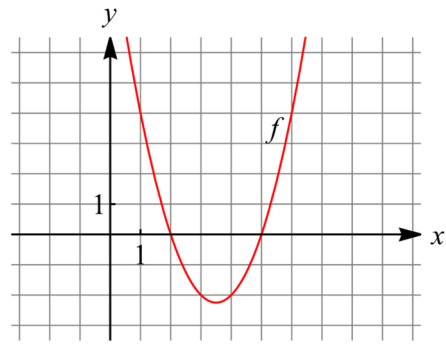
a) Løs ligningen  $f(x) = 0$  grafisk.  
Brug bilaget.



1.D1.67

På figuren ses grafen for et andengradspolynomium  $f$ .

- a) Løs ligningen  $f(x) = 4$  grafisk.  
Brug bilaget.



1.D1.68

Givet  $f(x) = 5x$ .

- a) Bestem  $f'(x)$ .

1.D1.69

Givet  $f(x) = 3x^2$ .

- a) Bestem  $f'(x)$ .

1.D1.70

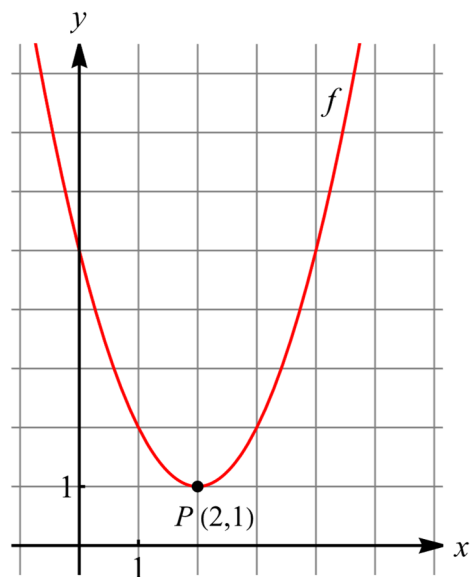
Givet  $f(x) = 4 \cdot \ln(x)$ .

- a) Bestem  $f'(x)$ .

1.D1.71

Parablen på figuren er graf for en funktion  $f$ .  
Parablens toppunkt er  $T(2, 1)$ .

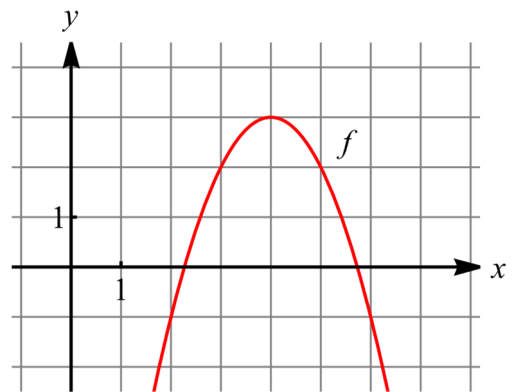
- a) Bestem  $f'(2)$ .  
Brug bilaget.



1.D1.72

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$ .

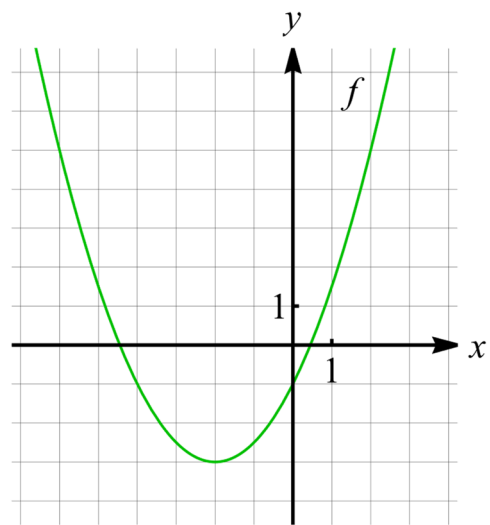
- a) Bestem  $x$ -koordinaten til det punkt på grafen, hvor der er vandret tangent. Brug bilaget.



1.D1.73

Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium  $f$ .

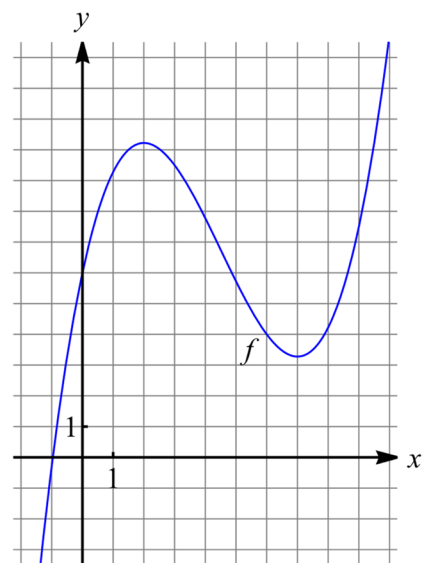
- a) Aflæs på grafen løsningen til ligningen  $f'(x) = 0$ . Brug bilaget.



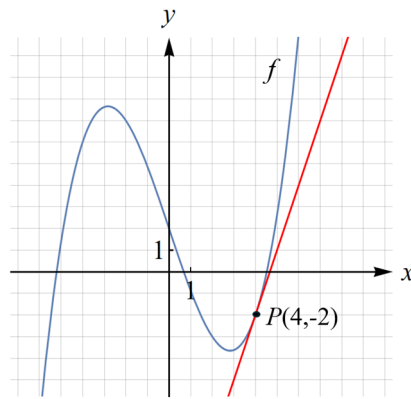
1.D1.74

På figuren ses grafen for et tredjegrads-polynomium  $f$ .

- a) I hvilket interval er funktionen aftagende? Brug bilaget.



1.D1.75



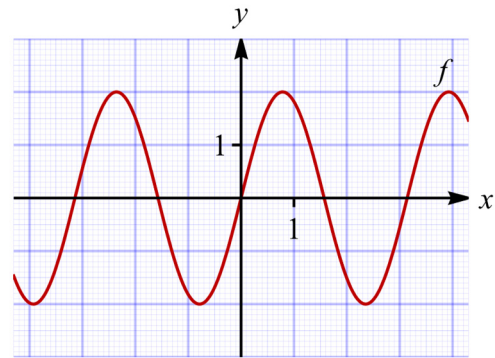
Figuren viser grafen for en funktion  $f$  og tangenten til grafen i punktet  $P(4, -2)$ .

- a) Bestem tangentens hældning ved aflæsning på figuren.  
Brug bilaget.

1.D1.76

Figuren viser grafen for en harmonisk svingning  $f$ .

- a) Bestem amplituden.  
Brug bilaget.

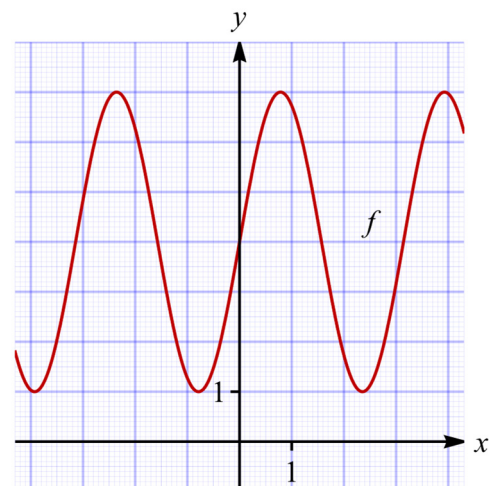


1.D1.77

Figuren viser grafen for en harmonisk svingning  $f$  givet ved forskriften

$$f(x) = 3 \cdot \sin(2x + 1) + d.$$

- a) Bestem ligevægtsværdien  $d$ .  
Brug bilaget.





1.D1.78

a) Bestem

$$\int x^5 dx .$$

1.D1.79

a) Bestem

$$\int 6x^2 dx .$$

1.D1.80

a) Bestem

$$\int 4 \cdot \cos(x) dx .$$

1.D1.81

En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 12x^5 .$$

a) Bestem en stamfunktion  $F$  til  $f$ .

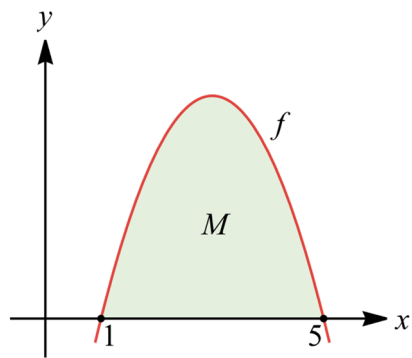
1.D1.82

Figuren viser grafen for en funktion  $f$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen et område  $M$ . Se figuren.

Arealet af  $M$  er lig 36.

a) Bestem  $\int_1^5 f(x) dx$  .

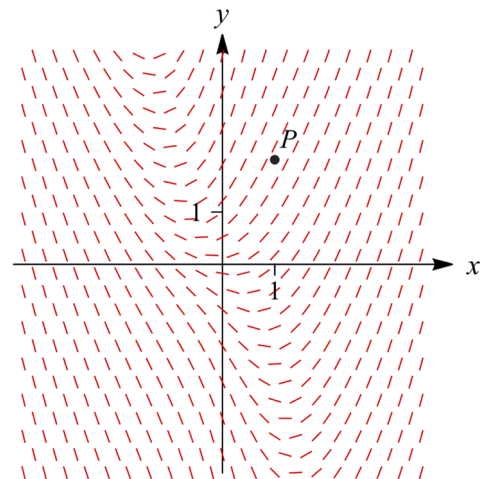


1.D1.83

Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

Grafen for en løsning  $f$  til differentialligningen går gennem  $P$ .

- a) Tegn en skitse af grafen for  $f$ .  
Brug bilaget.



1.D1.84

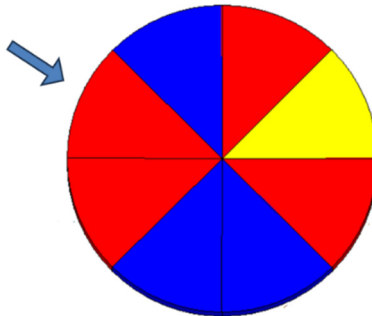
En funktion  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$y' = x + 2y.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(1,3)$ .

- a) Bestem linjeelementet i punktet  $P$ .

1.D1.85

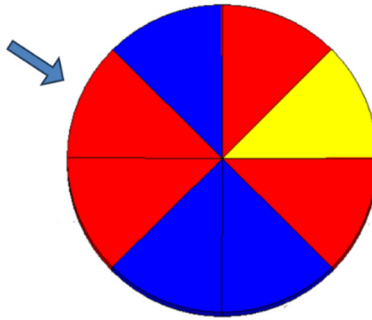


Figuren viser et lykkeshjul med 8 felter. Lykkeshjulet drejes, og spillets udfald er det felt, pilen peger på, når hjulet stopper. Alle felter har samme sandsynlighed.

Lykkeshjulet drejes én gang.

- a) Bestem sandsynligheden for, at pilen peger på enten et rødt felt eller et gult felt.

1.D1.86



Figuren viser et lykkeshjul med 8 felter. Lykkeshjulet drejes, og spillets udfald er det felt, pilen peger på, når hjulet stopper. Alle felter har samme sandsynlighed.

Lykkeshjulet drejes 2 gange.

- a) Bestem sandsynligheden for, at pilen peger på et blåt felt begge gange.

1.D1.87

- a) Bestem  $K(7,2)$ .

1.D1.88

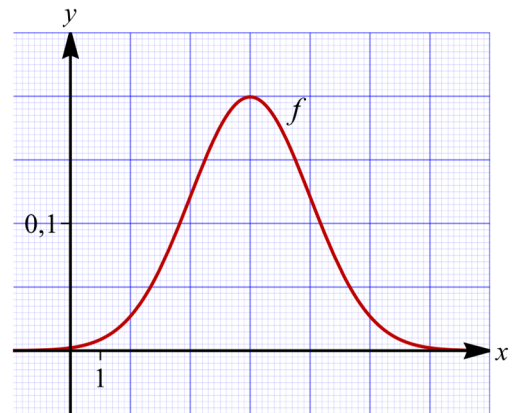
En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 12$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,4$ .

- a) Bestem middelværdien af  $X$ .

1.D1.89

Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen  $f$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

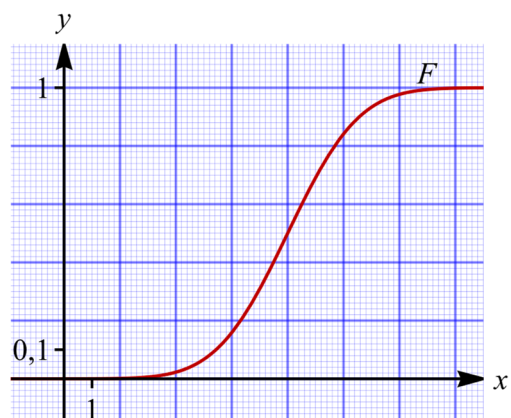
- a) Bestem middelværdien  $\mu$  for  $X$ .  
Brug bilaget.



1.D1.90

Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

- a) Bestem middelværdien  $\mu$  for  $X$ .  
Brug bilaget.



## 2. Tal og algebra

### Delprøve 1

**2.D1.1**

a) Reducér udtrykket

$$\frac{a^3 - 4a}{a}.$$

**2.D1.2**

a) Reducér udtrykket

$$\frac{a^5 \cdot a^3}{a^2}.$$

**2.D1.3**

a) Reducér udtrykket

$$3 \cdot (a + b) - 2a.$$

**2.D1.4**

a) Reducér udtrykket

$$a \cdot (a + b) - a^2.$$

**2.D1.5**

a) Reducér udtrykket

$$(a - b)^2 - a^2.$$

**2.D1.6**

a) Reducér udtrykket

$$(a + b) \cdot (a - b) + a^2 + 2b^2.$$

**2.D1.7**

a) Reducér udtrykket

$$(2a + b) \cdot (2a - b) + b^2.$$

**2.D1.8**

a) Reducér udtrykket

$$(3a + b) \cdot (2a - 4b) - 5a^2.$$

**2.D1.9**

a) Reducér udtrykket

$$\frac{3 \cdot (4a + b) - 3b}{2a}.$$

2.D1.10

a) Reducér udtrykket

$$\frac{3a+3b}{a+b}.$$

2.D1.11

a) Reducér udtrykket

$$\frac{9a^2+b^2+6a \cdot b}{3a+b}.$$

2.D1.12

a) Løs følgende ligning ved hjælp af ligningsregler

$$3 \cdot (x-2) = 21 - 6x.$$

2.D1.13

a) Løs følgende ligning ved hjælp af ligningsregler

$$\frac{x+4}{2} = 5.$$

2.D1.14

a) Løs ligningen

$$(x-5) \cdot \sqrt{x} = 0.$$

2.D1.15

a) Løs ligningen

$$\ln(x) \cdot (6-3x) = 0.$$

2.D1.16

a) Løs ligningen

$$e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0.$$

2.D1.17

a) Bestem tallet  $k$ , så  $x = 3$  er en løsning til ligningen

$$x^3 = k \cdot x + 6.$$

2.D1.18

En andengradsligning er givet ved

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

a) Bestem diskriminanten  $d$ , og forklar, hvad værdien af  $d$  fortæller om antallet af løsninger til ligningen.

**2.D1.19** Der er givet andengradsligningen

$$2x^2 + 2x - 12 = 0.$$

- a) Bestem diskriminanten  $d$ , og løs andengradsligningen.

**2.D1.20** En andengradsligning er givet ved

$$4x^2 - 7x + c = 0, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem tallet  $c$ , når det oplyses, at  $x = 3$  er en løsning til ligningen.

**2.D1.21** En andengradsligning er givet ved

$$-x^2 + b \cdot x - 6 = 0, \text{ hvor } b \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem tallet  $b$ , når det oplyses, at  $x = 2$  er en løsning til ligningen.

**2.D1.22** a) Bestem tallet  $c$ , så andengradsligningen

$$2x^2 + 12x + c = 0$$

har netop én løsning.

**2.D1.23** a) Bestem de værdier af  $b$ , hvor andengradsligningen

$$x^2 + b \cdot x + 16 = 0$$

har netop én løsning.

**2.D1.24** a) Isolér  $V$  i udtrykket

$$4 \cdot V - W = 7.$$

**2.D1.25** a) Isolér  $y$  i ligningen

$$15x + 5y - 50 = 0.$$

**2.D1.26** a) Isolér  $L$  i udtrykket

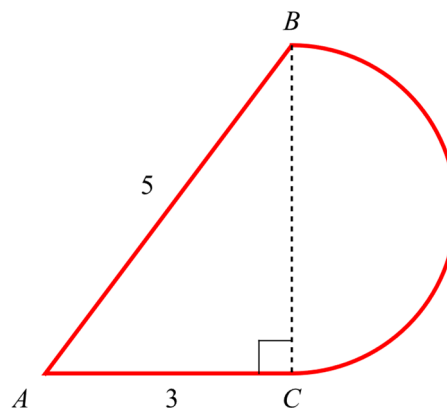
$$\frac{2 \cdot L + M}{N} = 9.$$

2.D1.27

Figuren til højre består af en retvinklet trekant  $ABC$  og en halvcirkel.

Det oplyses, at  $|AB| = 5$  og  $|AC| = 3$ .

- a) Bestem arealet af figuren.

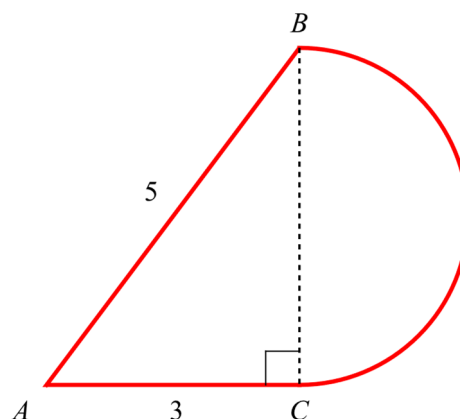


2.D1.28

Figuren til højre består af en retvinklet trekant  $ABC$  og en halvcirkel.

Det oplyses, at  $|AB| = 5$  og  $|AC| = 3$ .

- a) Bestem omkredsen af figuren.



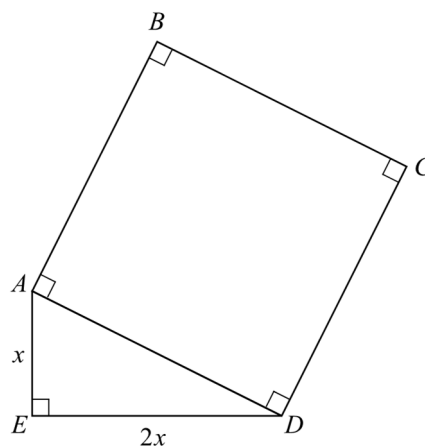
2.D1.29

Figuren til højre viser en femkant  $ABCDE$ .

Femkanten består af den retvinklede trekant  $ADE$  og kvadratet  $ABCD$ .

Det oplyses, at  $|AE| = x$  og  $|DE| = 2x$ .

- a) Bestem arealet af femkant  $ABCDE$  udtrykt ved  $x$ .





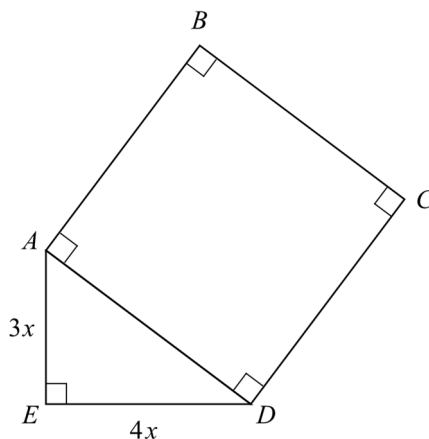
2.D1.30

Figuren til højre viser en femkant  $ABCDE$ .

Femkanten består af den retvinklede trekant  $ADE$  og kvadratet  $ABCD$ .

Det oplyses, at  $|AE| = 3x$  og  $|DE| = 4x$ .

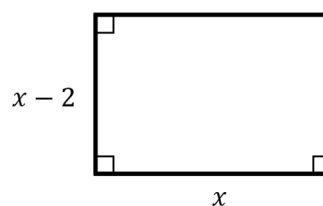
- a) Bestem omkredsen af femkant  $ABCDE$  udtrykt ved  $x$ .



2.D1.31

Figuren viser et rektangel med sidelængderne  $x$  og  $x - 2$ .

- a) Bestem  $x$ , så rektanglet får arealet 15.



2.D1.32

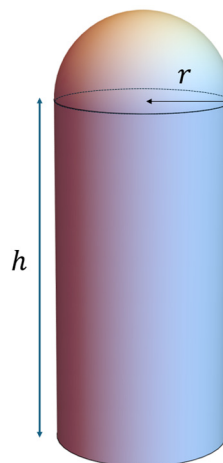
Figuren viser en model af en pullert, der bruges til trafiksikring.

En pullert består af en cylinder med radius  $r$  og højde  $h$ , og ovenpå cylinderen er der placeret en halvkugle med radius  $r$ .

Overfladearealet  $A$  af en sådan pullert kan beregnes med formlen

$$A = 2\pi \cdot r \cdot (h + r).$$

- a) Bestem overfladearealet af en pullert, hvor højden af cylinderen er 80 cm, og radius af halvkuglen er 20 cm.



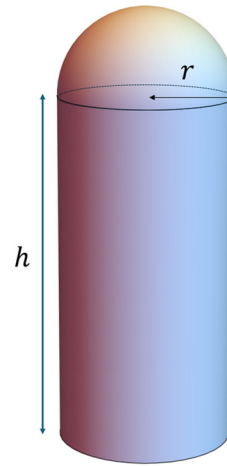
**2.D1.33**

Figuren viser en model af en pullert, der bruges til trafiksikring.

En pullert består af en cylinder med radius  $r$  og højde  $h$ , og ovenpå cylinderen er der placeret en halvkugle med radius  $r$ .

- a) Vis, at overfladearealet  $A$  af en sådan pullert kan beregnes med formlen

$$A = 2\pi \cdot r \cdot (h + r) .$$



## Delprøve 2

2.D2.1

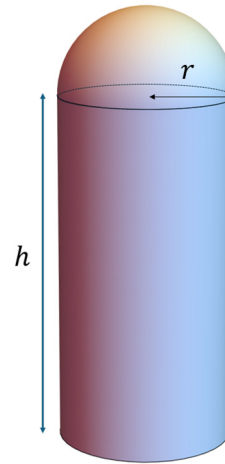
Figuren viser en model af en pullert, der bruges til trafiksikring.

En pullert består af en cylinder med radius  $r$  og højde  $h$ , og ovenpå cylinderen er der placeret en halvkugle med radius  $r$ .

Rumfanget  $V$  af en sådan pullert kan beregnes med formlen

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \left(h + \frac{2}{3}r\right).$$

- a) Bestem rumfanget af en pullert, hvor højden af cylinderen er 120 cm, og radius af halvkuglen er 25 cm.



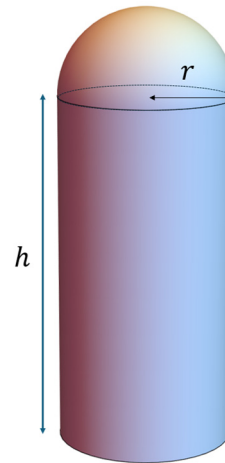
2.D2.2

Figuren viser en model af en pullert, der bruges til trafiksikring.

En pullert består af en cylinder med radius  $r$  og højde  $h$ , og ovenpå cylinderen er der placeret en halvkugle med radius  $r$ .

- a) Vis, at rumfanget af en sådan pullert kan beregnes med formlen

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \left(h + \frac{2}{3}r\right).$$



2.D2.3

Erfaring viser, at følgende model kan anvendes til at afgøre, om kvæg får såkaldt ”hede-stress”

$$H = 0,8 \cdot T + R \cdot (T - 14,4) + 46,4,$$

hvor  $H$  er hedeindeks-værdien,  $T$  er lufttemperaturen (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ), og  $R$  er luftfugtigheden (i decimaltal).

Det oplyses, at der er risiko for, at kvæg får hede-stress ved  $H$ -værdier over 68.

- a) Undersøg, om der er risiko for, at kvæg får hede-stress, hvis lufttemperaturen er  $25^{\circ}\text{C}$ , og luftfugtigheden er 65 %.

Kilde: pericoli

**2.D2.4** I en model kan dugpunktet beregnes ved hjælp af formlen

$$D = \frac{243,0 \cdot N}{1 - N},$$

hvor  $D$  er dugpunktet (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ), og

$$N = \frac{\ln(R) + \frac{17,6 \cdot T}{243,0 + T}}{17,6}.$$

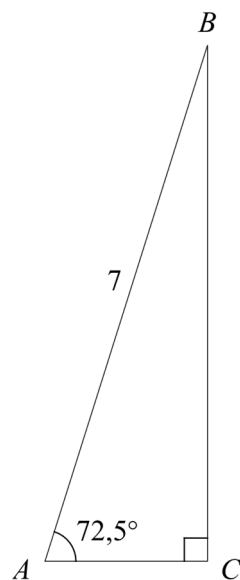
$R$  er den relative luftfugtighed, og  $T$  er lufttemperaturen (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ).

a) Bestem dugpunktet  $D$ , hvis  $R = 0,65$  og  $T = 32$ .

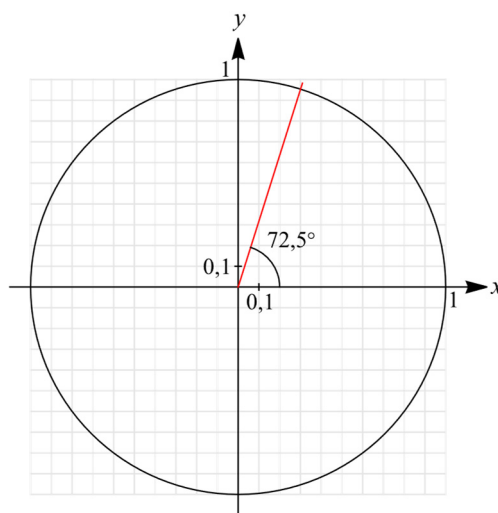
## 3. Geometri

## Delprøve 1

## 3.D1.1



Figur 1

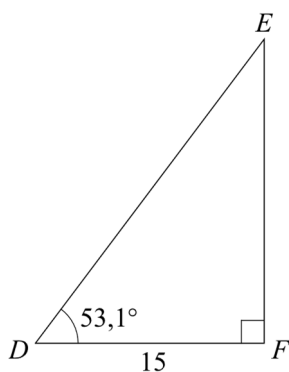


Figur 2

Figur 1 viser den retvinklede trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Figur 2 viser enhedscirklen, hvor trekantens vinkel  $A$  er indtegnet.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $b$ .  
Brug bilaget.

## 3.D1.2

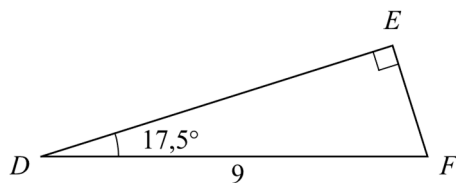


| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $53,1^\circ$                                  | 0,6       | 0,8       | 1,3       |

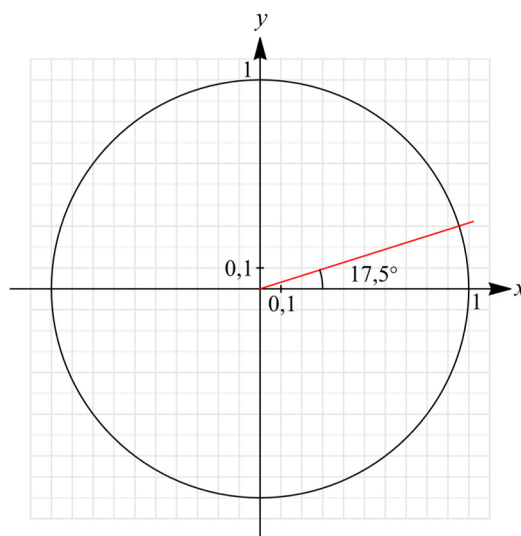
Figuren viser den retvinklede trekant  $DEF$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $f$ .

## 3.D1.3



Figur 1

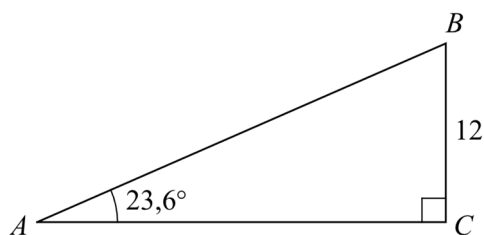


Figur 2

Figur 1 viser den retvinklede trekant  $DEF$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Figur 2 viser enhedscirklen, hvor trekantens vinkel  $D$  er indtegnet.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $d$ .  
Brug bilaget.

## 3.D1.4

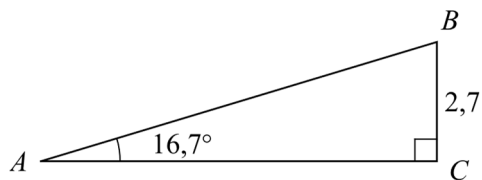


| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $23,6^\circ$                                  | 0,9       | 0,4       | 0,4       |

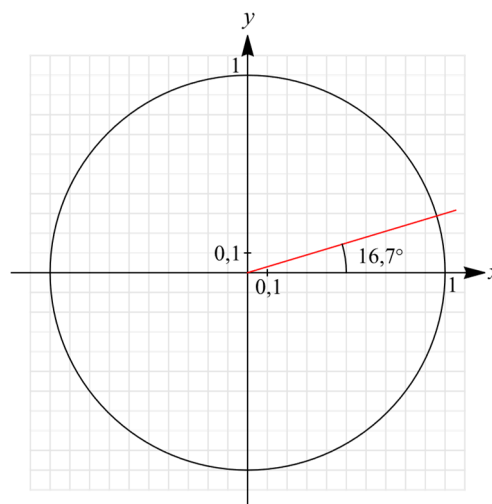
Figuren viser den retvinklede trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $c$ .

## 3.D1.5



Figur 1

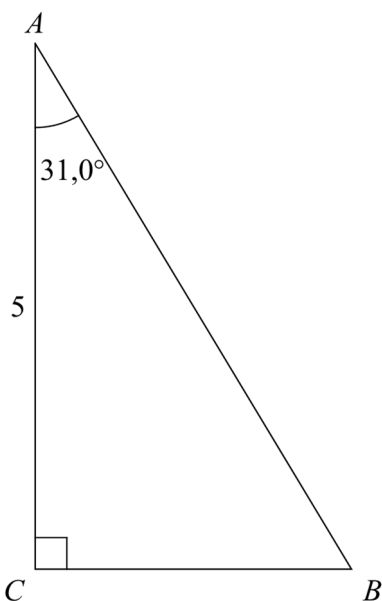


Figur 2

Figur 1 viser den retvinklede trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Figur 2 viser enhedscirklen, hvor trekantens vinkel  $A$  er indtegnet.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $b$ .  
Brug bilaget.

## 3.D1.6

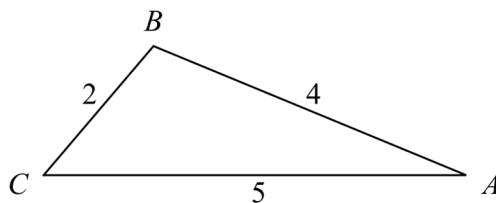


| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $31,0^\circ$                                  | 0,9       | 0,5       | 0,6       |

Figuren viser den retvinklede trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden  $a$ .

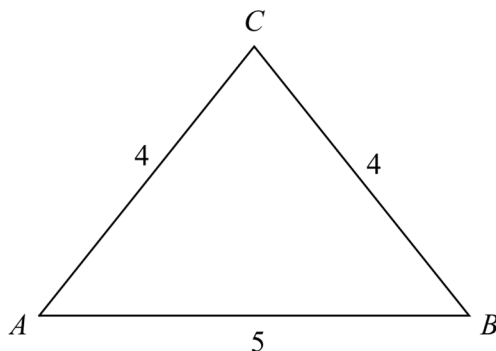
## 3.D1.7



Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

- a) Bestem  $\cos(C)$ .

## 3.D1.8

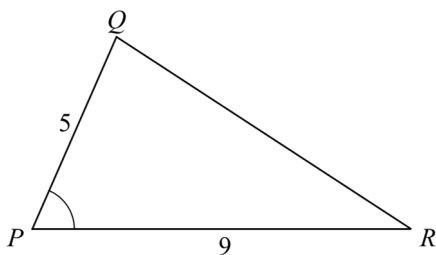


Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

- a) Gør rede for, at

$$\cos(A) = \frac{5}{8}.$$

## 3.D1.9



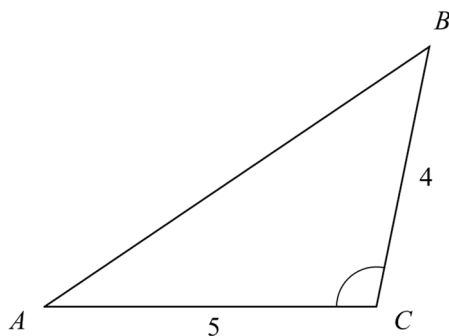
| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|
| $\cos(P)$                                     | $\sin(P)$ | $\tan(P)$ |
| 0,4                                           | 0,9       | 2,3       |

Figuren viser trekant  $PQR$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren. Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Gør rede for, at  $p = \sqrt{70}$ .



## 3.D1.10

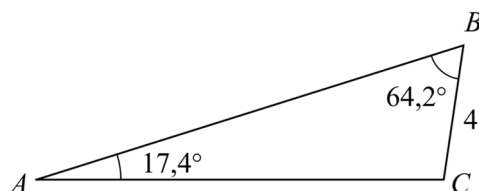


Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Det oplyses, at  $\cos(C) = -0,2$ .

- a) Bestem længden af siden  $c$ .

## 3.D1.11

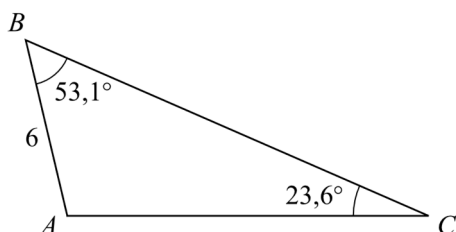


Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Det oplyses, at  $\sin(17,4^\circ) = 0,3$  og  $\sin(64,2^\circ) = 0,9$ .

- a) Bestem længden af siden  $b$  i trekant  $ABC$ .

## 3.D1.12



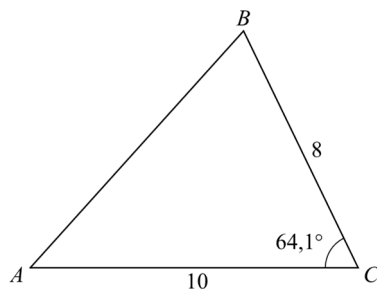
| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $23,6^\circ$                                  | 0,9       | 0,4       | 0,4       |
| $53,1^\circ$                                  | 0,6       | 0,8       | 1,3       |

Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Bestem længden af siden  $b$  i trekant  $ABC$ .

## 3.D1.13

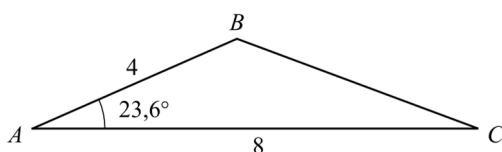


Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Det oplyses, at  $\sin(64,1^\circ) = 0,9$ .

- a) Bestem arealet af trekant  $ABC$ .

## 3.D1.14



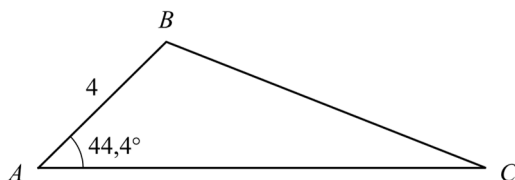
| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $23,6^\circ$                                  | 0,9       | 0,4       | 0,4       |

Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

- a) Gør rede for, at arealet af trekanten er 6,4.

## 3.D1.15



| Trigonometritabel med én decimals nøjagtighed |           |           |           |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $v$                                           | $\cos(v)$ | $\sin(v)$ | $\tan(v)$ |
| $44,4^\circ$                                  | 0,7       | 0,7       | 1,0       |

Figuren viser trekant  $ABC$ . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

Tabellen viser udvalgte tabelværdier for cosinus, sinus og tangens.

Det oplyses, at arealet af trekant  $ABC$  er lig 14.

- a) Bestem længden af siden  $b$  i trekant  $ABC$ .

## 4. Analytisk plangeometri

## Delprøve 1

**4.D1.1** En vektor  $\vec{a}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden af vektor  $\vec{a}$ .

**4.D1.2** En vektor  $\vec{a}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden  $|\vec{a}|$  af vektor  $\vec{a}$ , når  $t = 6$ .  
b) Bestem de værdier af tallet  $t$ , hvor længden af vektor  $\vec{a}$  er lig 17.

**4.D1.3** En vektor  $\vec{a}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2k \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } k \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem den positive værdi af tallet  $k$ , hvor længden af vektor  $\vec{a}$  er lig 10.

**4.D1.4** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

**4.D1.5** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 5\vec{b}$ .

4.D1.6

Tre vektorer  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- a) Undersøg, om der findes et tal  $k$ , så  $\vec{a} + \vec{b} = k \cdot \vec{c}$ .

4.D1.7

To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

4.D1.8

To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem skalarproduktet  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

4.D1.9

To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

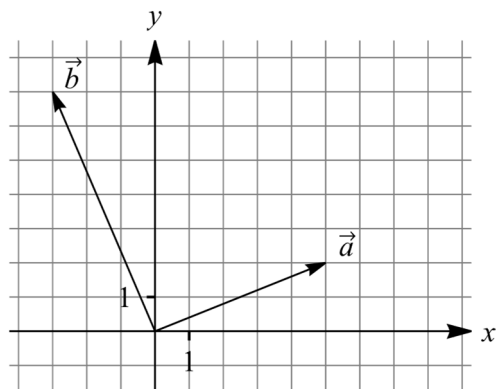
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

- a) Undersøg, om vinklen mellem vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$  er ret.

4.D1.10

På figuren ses to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .

- a) Bestem koordinatsættet til hver af vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . Brug bilaget.
- b) Gør rede for, at de to vektorer ikke er ortogonale.



**4.D1.11** Tre vektorer  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses, at  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$ , og at  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 23$ .

a) Bestem tallene  $c_1$  og  $c_2$ .

**4.D1.12** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t+1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem skalarproduktet  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , når  $t = 3$ .

b) Bestem tallet  $t$ , så vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

**4.D1.13** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem skalarproduktet af vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$ , når  $t = 3$ .

b) Bestem de værdier af tallet  $t$ , hvor vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

**4.D1.14** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem determinanten  $\det(\vec{a}, \vec{b})$ .

**4.D1.15** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

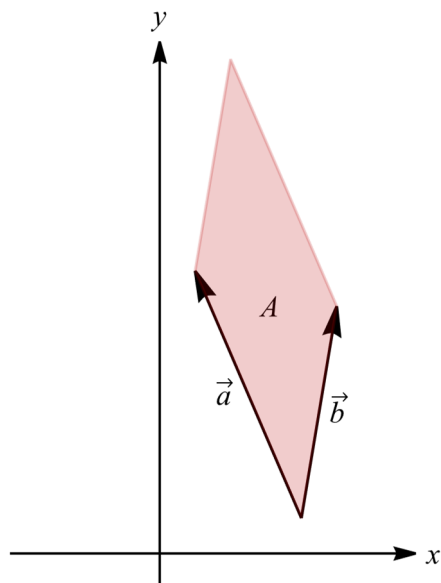
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$  er parallelle.

**4.D1.16** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem arealet af det parallellogram, der udspændes af vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$ .



**4.D1.17** I et koordinatsystem er givet to punkter  $A(7,16)$  og  $B(14,11)$

og en vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestem arealet af parallellogrammet udspændt af forbindelsesvektor  $\overrightarrow{AB}$  og vektor  $\vec{c}$ .

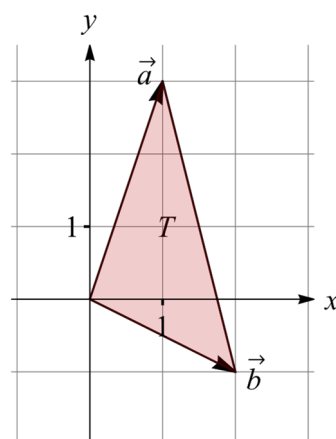
**4.D1.18** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem arealet af den trekant, der udspændes af vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$ .

**4.D1.19** En trekant  $T$  udspændes af vektorene  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . Se figuren.

- a) Bestem arealet af trekant  $T$ .



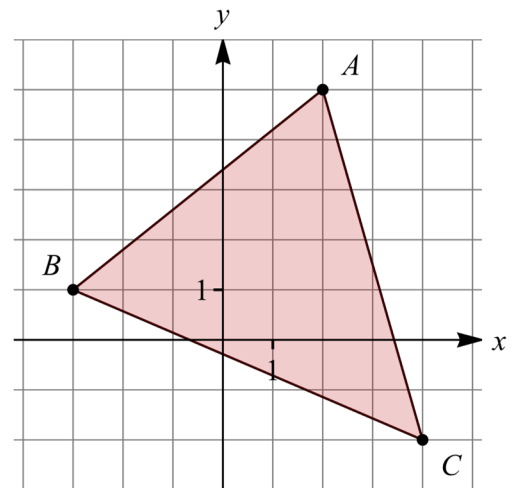
4.D1.20

Trekant  $ABC$  er givet ved punkterne

$$A(2,5), B(-3,1) \text{ og } C(4,-2).$$

Se figuren.

- a) Bestem arealet af trekanten.



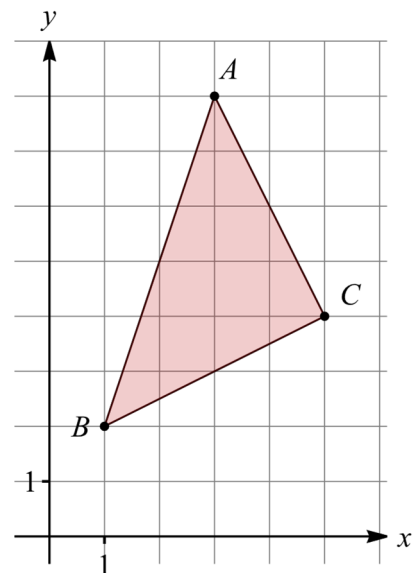
4.D1.21

Trekant  $ABC$  er givet ved punkterne

$$A(3,8), B(1,2) \text{ og } C(5,4).$$

Se figuren.

- a) Gør rede for, at trekanten er retvinklet.



4.D1.22

En trekant  $ABC$  har vinkelspidserne  $A(3,4)$ ,  $B(5,-5)$  og  $C(14,-3)$ .

- a) Gør rede for, at trekant  $ABC$  har netop to lige lange sider.

**4.D1.23** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem determinanten  $\det(\vec{a}, \vec{b})$ , når  $t = -3$ .
- b) Bestem tallet  $t$ , så vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er parallelle.

**4.D1.24** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem de værdier af tallet  $t$ , hvor vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er parallelle.

**4.D1.25** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem tallet  $t$ , så  $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 15$ .

**4.D1.26** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til projektionen  $\vec{b}_a$  af vektor  $\vec{b}$  på vektor  $\vec{a}$ .

**4.D1.27** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden af projektionen af vektor  $\vec{a}$  på vektor  $\vec{b}$ .

**4.D1.28** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne

$$l: y = 5x - 6$$

$$m: y = -2x + 8$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .



**4.D1.29** En linje  $l$  har ligningen

$$l: y = 3x + 7,$$

og en anden linje  $m$  har ligningen

$$m: y = c \cdot x - 8, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

a) Bestem værdien af  $c$ , så linjerne  $l$  og  $m$  er ortogonale.

**4.D1.30** I et koordinatsystem er givet tre punkter  $A(-6, -2)$ ,  $B(0, 1)$  og  $C(30, 16)$ .

a) Undersøg, om punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$  ligger på en ret linje.

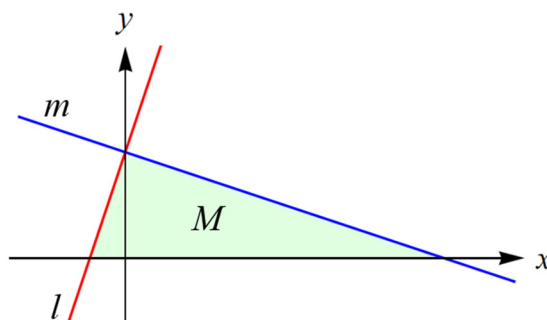
**4.D1.31** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 4x + 3.$$

Linjen  $m$  står vinkelret på  $l$  og går gennem punktet  $P(0, 7)$ .

a) Bestem en ligning for  $m$ .

**4.D1.32**



To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne

$$l: y = 3x + 6$$

$$m: y = -\frac{1}{3}x + 6$$

a) Undersøg, om linjerne  $l$  og  $m$  er ortogonale.

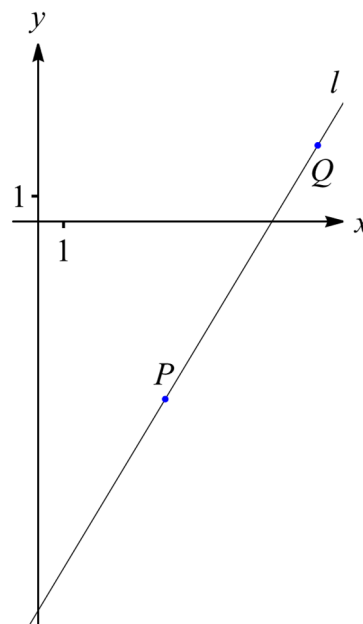
Sammen med  $x$ -aksen afgrænser  $l$  og  $m$  et trekantet område  $M$ , se figuren.

b) Bestem arealet af  $M$ .

**4.D1.33** En linje  $l$  går gennem punktet  $P(-4,3)$ .  
Vektoren  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  er en normalvektor for  $l$ .

a) Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .

**4.D1.34** En linje  $l$  går gennem punkterne  
 $P(5,-7)$  og  $Q(11,3)$ .  
a) Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .



**4.D1.35** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om punktet  $P(15,14)$  ligger på  $l$ .

**4.D1.36** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

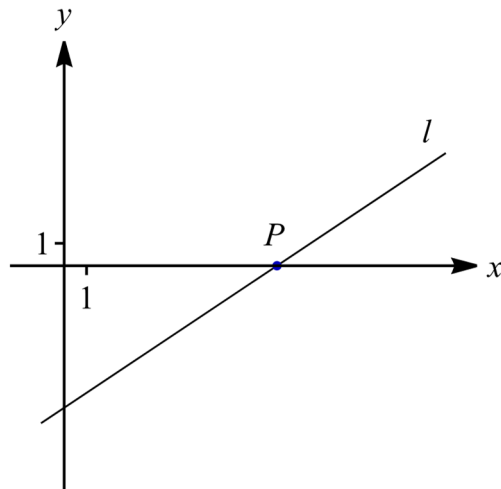
$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en normalvektor for  $l$ .

**4.D1.37** En linje  $l$  går gennem punktet  $P(-4,6)$  og har retningsvektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

a) Tegn linjen  $l$ . Brug bilaget.

4.D1.38



En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet  $P$  mellem linjen  $l$  og  $x$ -aksen.

4.D1.39

En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen  $l$  og  $y$ -aksen.

4.D1.40

En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem en ligning for  $l$  på formen  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .

4.D1.41

En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem en ligning for  $l$  på formen  $y = a \cdot x + b$ .

4.D1.42

En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: 6x + 5y - 3 = 0.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .

**4.D1.43** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

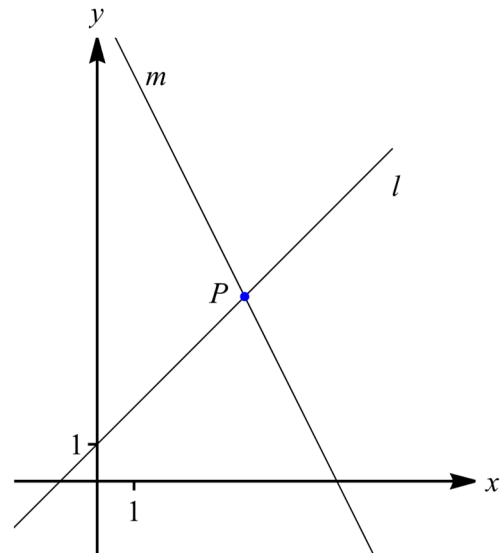
a) Gør rede for, at vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  står vinkelret på  $l$ .

**4.D1.44** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet  $P$  mellem  $l$  og  $m$ .



**4.D1.45** En linje  $l$  går gennem punktet  $P(4, -7)$  og har vektoren  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  som normalvektor.

a) Bestem en ligning for  $l$  på formen  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .

**4.D1.46** En linje  $l$  går gennem punktet  $P(-2, 11)$ .

Vektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  er en retningsvektor for  $l$ .

a) Bestem en ligning for  $l$ .

**4.D1.47** En linje  $l$  går gennem punkterne  $P(-5, 8)$  og  $Q(3, 4)$ .

a) Bestem en ligning for  $l$  på formen  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .

**4.D1.48** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: y = 4x - 11.$$

a) Bestem en normalvektor for  $l$ .

**4.D1.49** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: 4x - 5y - 23 = 0.$$

- a) Undersøg, om punktet  $P(9,3)$  ligger på  $l$ .

**4.D1.50** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: -3x + y + 12 = 0.$$

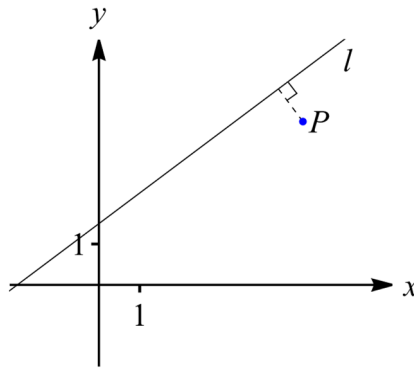
- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen  $l$  og  $x$ -aksen.

**4.D1.51** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: -x + 3y + 3 = 0.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen  $l$  og  $y$ -aksen.

**4.D1.52**

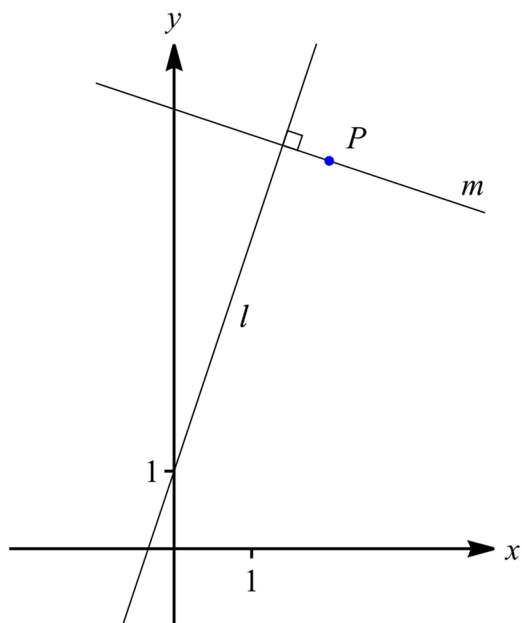


En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: 3x - 4y + 6 = 0.$$

- a) Bestem afstanden fra punktet  $P(5,4)$  til linjen  $l$ .

4.D1.53

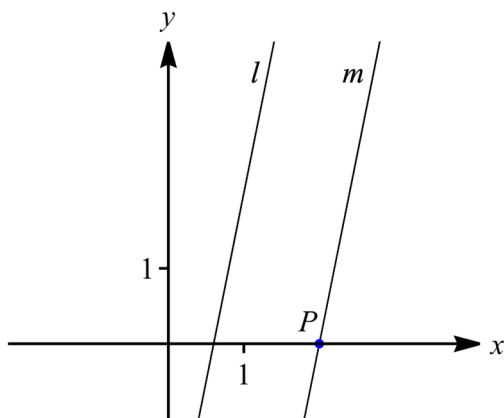


En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: 3x - y + 1 = 0.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for den linje  $m$ , der står vinkelret på  $l$ , og som går gennem punktet  $P(2,5)$ . Se figuren.

4.D1.54



En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for den linje  $m$ , der er parallel med  $l$ , og som går gennem punktet  $P(2,0)$ . Se figuren.

**4.D1.55** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: 3x - y + 1 = 0.$$

- a) Bestem en ligning for den linje  $m$ , der er parallel med  $l$ , og som går gennem punktet  $P(1, -7)$ .

**4.D1.56** a) Løs ligningssystemet

$$3x + 5y = 2$$

$$2x - 3y = 14$$

**4.D1.57** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved

$$l: x + y - 18 = 0$$

$$m: -8x + 2y - 6 = 0$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .

**4.D1.58** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$m: -3x + y - 12 = 0$$

- a) Gør rede for, at  $l$  og  $m$  er parallelle.

**4.D1.59** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m: y = -4x + 1$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .

**4.D1.60** En cirkel har centrum i punktet  $C(3, 7)$  og radius  $r = 5$ .

- a) Bestem en ligning for cirklen.  
b) Vis, at punktet  $P(7, 11)$  ligger uden for cirklen.

**4.D1.61** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

- Bestem cirkelns radius og koordinatsættet til cirkelns centrum.
- Bestem koordinatsættet til hvert af cirkelns skæringspunkter med y-aksen.

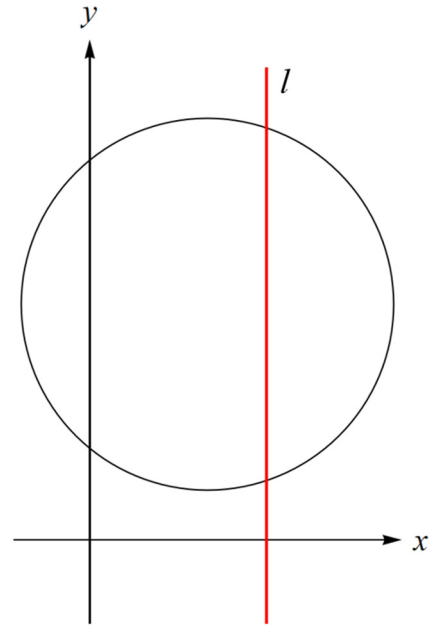
**4.D1.62** På figuren ses en cirkel givet ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 10 = 0,$$

og en lodret linje  $l$  givet ved ligningen

$$l: x = 3.$$

- Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen  $l$ .



**4.D1.63** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100,$$

og en linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: y = 3x - 12.$$

- Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen  $l$ .

**4.D1.64** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

- Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen.



**4.D1.65** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100.$$

- Vis, at punktet  $P(4,9)$  ligger på cirklen.
- Bestem en ligning for tangenten til cirklen i  $P$ .

**4.D1.66** En cirkel har centrum i punktet  $C(-6,2)$  og radius  $r = 5$ .

- Bestem en ligning for cirklen.

Punktet  $P(-2,5)$  ligger på cirklen.

- Bestem vektor  $\overrightarrow{PC}$ .  
Bestem en ligning for tangenten til cirklen i  $P$ .

**4.D1.67** En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + 4x + y^2 - 10y + 13 = 0.$$

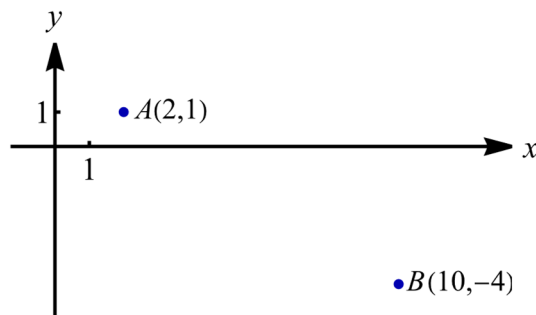
- Vis, at cirklen har centrum i  $C(-2,5)$ .

**4.D1.68** En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3.$$

- Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til cirkelens centrum.

**4.D1.69**



Figuren viser to punkter

$A(2,1)$  og  $B(10,-4)$ .

$M$  betegner midtpunktet af linjestykket  $AB$ .

- Bestem koordinatsættet til  $M$ .

4.D1.70

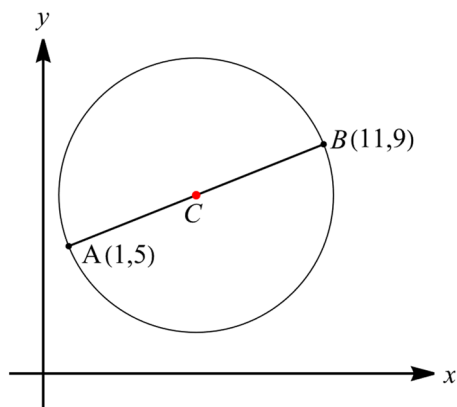
En cirkel går gennem to punkter

$$A(1,5) \text{ og } B(11,9).$$

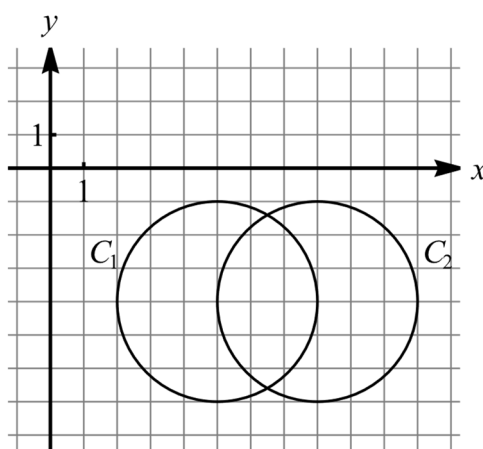
Linjestykket  $AB$  er en diameter i cirklen.

Se figuren.

- a) Bestem en ligning for cirklen.



4.D1.71



Figuren viser to cirkler  $C_1$  og  $C_2$ .

- a) Gør rede for, hvilken af cirklerne der har ligningen

$$(x-8)^2 + (y+4)^2 = 9.$$

4.D1.72

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-3)^2 + (y-8)^2 = 36,$$

og en vandret linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 13.$$

- a) Gør rede for, at linjen  $l$  og cirklen har to punkter fælles.

**4.D1.73**

En cirkel har ligningen

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10,$$

og en linje  $l$  har ligningen

$$y = \frac{1}{2}x - 7.$$

- a) Bestem en ligning for den linje  $m$ , der er parallel med  $l$ , og som går gennem cirkelns centrum.

**4.D1.74**

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 25.$$

En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$4x + 3y - 51 = 0.$$

- a) Gør rede for, at linjen  $l$  er tangent til cirklen.

**4.D1.75**

En cirkel har ligningen

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16,$$

og en linje  $l$  har ligningen

$$y = 2x - 7.$$

- a) Gør rede for, at linjen ikke skærer cirklen.

**4.D1.76**

En cirkel er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Bestem cirkelns radius og koordinatsættet til cirkelns centrum.

**4.D1.77**

En cirkel er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) \\ 3 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem en ligning for cirklen.

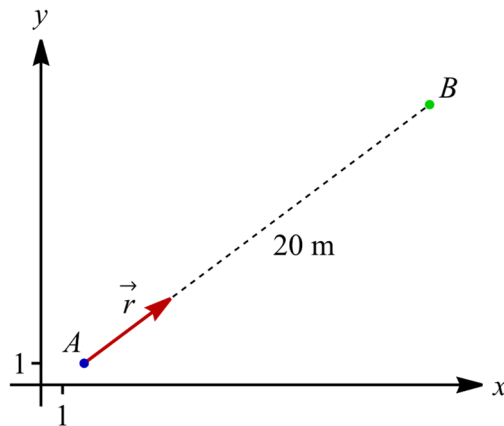
**4.D1.78**

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 81.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for cirklen.

4.D1.79



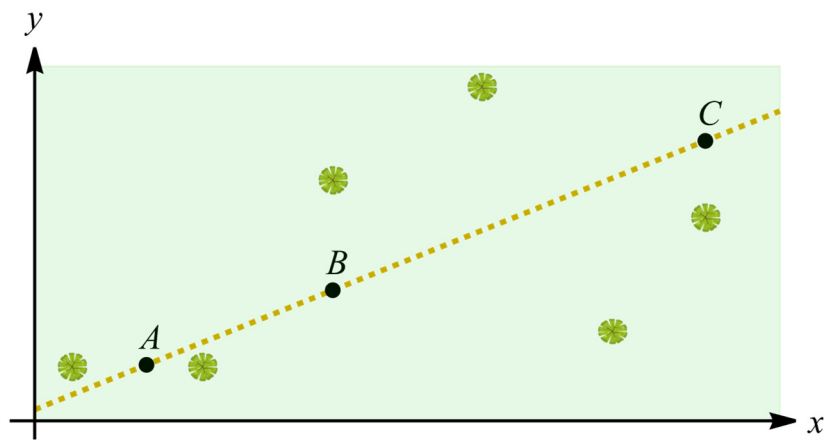
Said ønsker at løbe små intervaller på 20 meter mellem to punkter på en løbebane. Løbebanen følger en ret linje.

På figuren er de to punkter indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Said begynder sit intervalløb i punktet  $A$  og slutter i punktet  $B$ .

Punktet  $A$  har koordinatsættet  $A(2,1)$ , og vektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  er retningsvektor for linjen gennem punkterne  $A$  og  $B$ .

- a) Bestem koordinatsættet til punktet  $B$ .

4.D1.80



I en bestemt park skal der placeres tre bænke på en sti.

På figuren ses en model af parken indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

Det oplyses, at stien følger en ret linje, og at bänk 1 skal placeres i punktet  $A(6,3)$ , og at bänk 2 skal placeres i punktet  $B(16,7)$ .

- a) Bestem koordinatsættet til det punkt  $C$  på stien, hvor bänk 3 skal placeres, hvis afstanden fra  $B$  til  $C$  skal være dobbelt så stor som afstanden fra  $A$  til  $B$ .

## Delpøve 2

**4.D2.1** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem vinklen mellem vektor  $\vec{a}$  og vektor  $\vec{b}$ .
- b) Bestem projektionen  $\vec{b}_a$  af vektor  $\vec{b}$  på vektor  $\vec{a}$ .

**4.D2.2** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 0,4x + 2,3.$$

- a) Bestem ved beregning hældningsvinklen for linjen  $l$ .
- b) Bestem afstanden fra punktet  $P(4.2, -5.1)$  til linjen  $l$ .

**4.D2.3** Linjen  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 2x + 1.$$

- a) Bestem koordinatsættene til hvert af de to punkter på  $x$ -aksen, hvor afstanden til linjen  $l$  er 7.

**4.D2.4** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne

$$l: 3x + y - 5 = 0$$

$$m: 2x - y + 1 = 0$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .
- b) Brug en formel til at bestemme den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

**4.D2.5** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .
- b) Brug en formel til at bestemme den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

**4.D2.6** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m: 3x + 5y - 3 = 0$$

- Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .
- Brug en formel til at bestemme den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

**4.D2.7** En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

- Bestem ved beregning koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen  $l$  og  $x$ -aksen.
- Bestem den spidse vinkel mellem linjen  $l$  og  $x$ -aksen.

**4.D2.8** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$6x + 7y - 20 = 0.$$

Et punkt  $P$  har koordinatsættet  $P(3,5)$ .

- Brug en formel til at bestemme afstanden mellem linjen  $l$  og punktet  $P$ .

En linje  $m$  går igennem punktet  $P$  og står vinkelret på linjen  $l$ .

- Bestem en parameterfremstilling for linjen  $m$ .

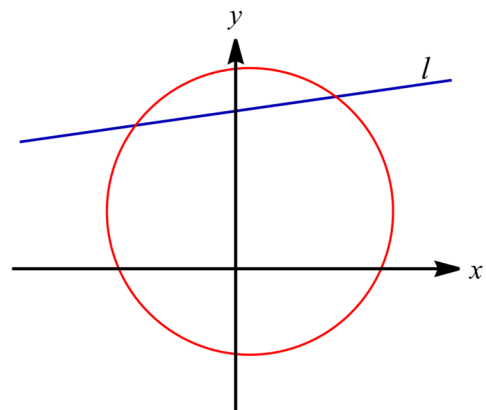
**4.D2.9** På figuren ses en cirkel givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 100$$

og en linje  $l$  givet ved ligningen

$$y = \frac{1}{7}x + 11.$$

- Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen  $l$ .
- Bestem en ligning for hver af de to tangenter til cirklen, som er parallelle med  $l$ .



**4.D2.10** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 100.$$

En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen  $l$  og cirklen.

**4.D2.11** Linjen  $l$  har ligningen

$$l: y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

- a) Bestem ved beregning hældningsvinklen for linjen.

En cirkel har centrum i punktet  $C(6,5)$  og har linjen  $l$  som tangent.

- b) Bestem en ligning for cirklen.

**4.D2.12** En cirkel har centrum i punktet  $C(2,-1)$  og radius  $r = 5$ .

- a) Bestem en ligning for cirklen.

Cirklen har to tangenter, der er parallelle med vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to tangenters røringspunkter med cirklen.

**4.D2.13** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 100.$$

En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$-4x + 3y - 80 = 0.$$

- a) Bestem ved beregning afstanden fra linjen  $l$  til cirkelns centrum.

- b) Bestem en ligning for hver af de tangenter til cirklen, der står vinkelret på linjen  $l$ .

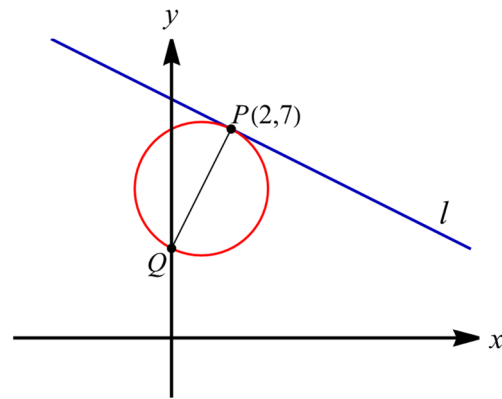
- 4.D2.14** På figuren vises en cirkel og en linje  $l$ .  
Linjen  $l$  har ligningen

$$y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Linjen  $l$  er tangent til cirklen i punktet  $P(2,7)$ .

Punktet  $Q$  ligger på  $y$ -aksen, og linjestykket  $PQ$  er diameter i cirklen.

- a) Bestem koordinatsættet til punktet  $Q$ .



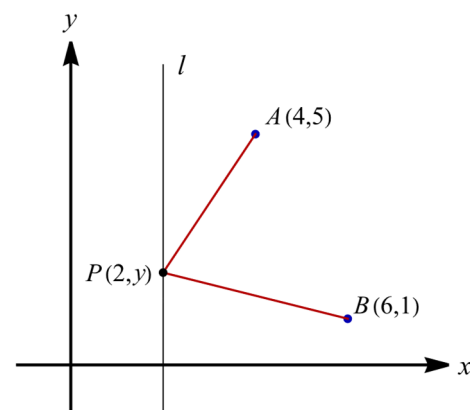
- 4.D2.15** I et koordinatsystem er givet to punkter  
 $A(4,5)$  og  $B(6,1)$

samt en lodret linje  $l$  med ligningen

$$l: x = 2.$$

Et punkt  $P(2,y)$  ligger på linjen  $l$ .

- a) Bestem  $y$ , så  $|PA| = |PB|$ .



- 4.D2.16** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 2x - 8.$$

Punktet  $P(x,0)$  ligger på  $x$ -aksen.

- a) Bestem de to værdier af  $x$ , hvor afstanden mellem linjen  $l$  og punktet  $P$  er lig 3.



**4.D2.17** På figuren ses en cirkel givet ved ligningen

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 36$$

og en linje  $l$  givet ved ligningen

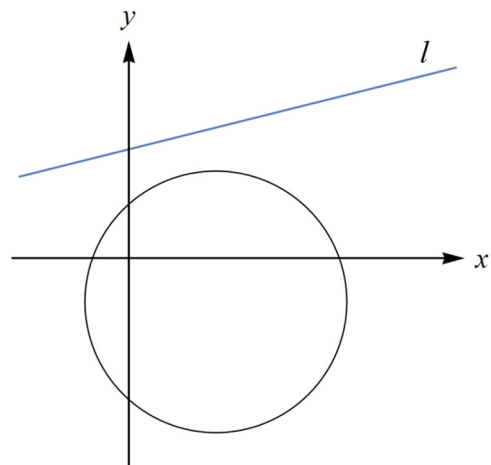
$$y = \frac{1}{4}x + 5.$$

- a) Bestem ved brug af en formel afstanden mellem cirklen og linjen  $l$ .

En anden linje  $m$  er givet ved ligningen

$$y = \frac{1}{4}x + b, \text{ hvor } b > 0.$$

- b) Bestem tallet  $b$ , så linjen  $m$  er tangent til cirklen.



**4.D2.18** En cirkel er givet ved ligningen

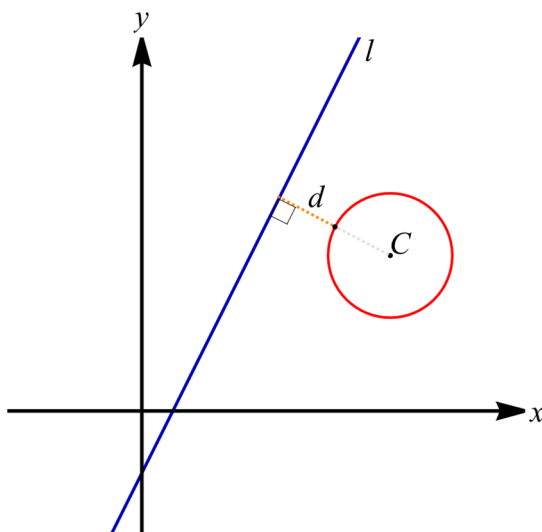
$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 169.$$

En linje er givet ved ligningen

$$12x + 5y + c = 0, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, når  $c = 60$ .
- b) Bestem de værdier af  $c$ , hvor linjen er tangent til cirklen.

## 4.D2.19



På figuren ses en model af en park indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

I parken er der anlagt en cirkelformet plads givet ved ligningen

$$(x - 40)^2 + (y - 25)^2 = 100.$$

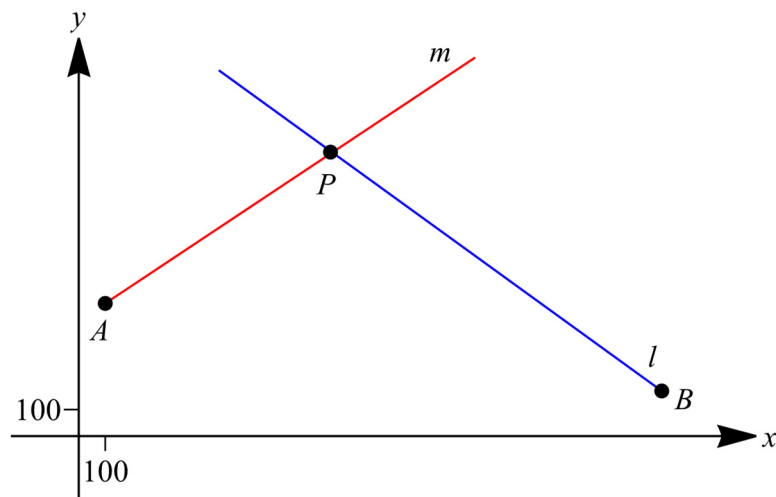
a) Bestem cirkelns radius og koordinatsættet til cirkelns centrum  $C$ .

I parken er der også anlagt en sti givet ved linjen  $l$  med ligningen

$$-2x + y + 10 = 0.$$

b) Bestem afstanden  $d$  mellem linjen  $l$  og cirklen (se figuren).

## 4.D2.20



På figuren ses to skibes sejlruiter indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

Skib A befinder sig til begyndelsestidspunktet i punktet  $A(100, 500)$ .

Skib B befinder sig til begyndelsestidspunktet i punktet  $B(2200, 170)$ .

Skib A's sejlroute kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 232 \\ 154 \end{pmatrix},$$

hvor  $s$  angiver antal minutter efter begyndelsestidspunktet.

Skib B's sejlroute kan beskrives ved parameterfremstillingen

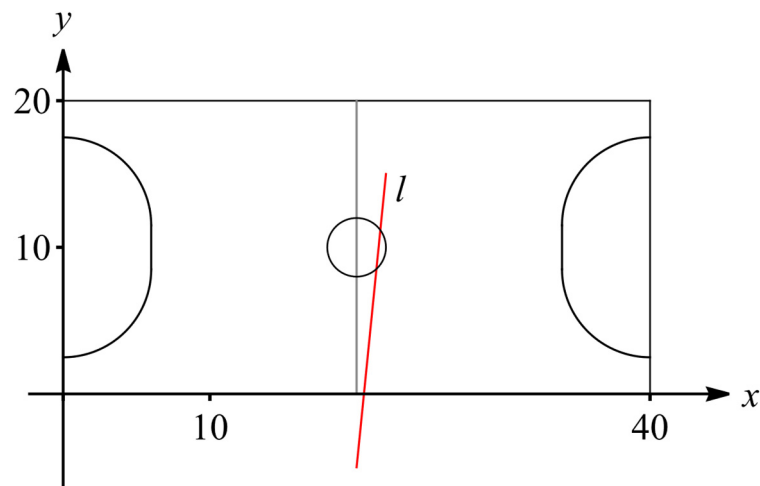
$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2200 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -278 \\ 201 \end{pmatrix},$$

hvor  $t$  angiver antal minutter efter begyndelsestidspunktet.

Skæringspunktet for de to sejlruiter kaldes  $P$ .

- a) Hvilket af de to skibe når først frem til punktet  $P$ ?

## 4.D2.21



En robotstøvsuger er i gang med at støvsuge gulvet i en sportshal.

På figuren er halgulvet indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

På et bestemt tidspunkt begynder støvsugeren at bevæge sig i en ret linje mod sin dockingstation (hvor den skal oplades).

Støvsugerens bane kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,05 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 40,$$

hvor  $t$  angiver antal sekunder, efter at støvsugeren er begyndt at bevæge sig mod sin dockingstation.

- a) Bestem koordinatsættet til støvsugerens position til tidspunktet  $t = 4$ .

Midtercirklen i sportshallen kan beskrives ved ligningen

$$(x - 20)^2 + (y - 10)^2 = 4.$$

- b) Bestem ved beregning det tidspunkt, hvor støvsugeren første gang passerer midtercirklen.

På sin vej tilbage til dockingstationen passerer støvsugeren sportsbanens ene sidelinje. Denne sidelinje er på figuren sammenfaldende med  $x$ -aksen.

- c) Bestem koordinatsættet til det punkt, hvor støvsugeren passerer sidelinjen.

## 5. Analytisk rumgeometri

## Delprøve 1

**5.D1.1**En vektor  $\vec{a}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem længden af vektor  $\vec{a}$ .**5.D1.2**En vektor  $\vec{a}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2k \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } k \text{ er et tal.}$$

a) Bestem de værdier af  $k$ , hvor længden af vektor  $\vec{a}$  er lig 9.**5.D1.3**To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til vektoren  $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .**5.D1.4**To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem skalarproduktet  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

**5.D1.5** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om  $\vec{a}$  står vinkelret på  $\vec{b}$ .

**5.D1.6** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \text{ er et tal.}$$

a) Bestem de værdier af  $t$ , hvor  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

**5.D1.7** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \text{ er et tal.}$$

a) Bestem de værdier af  $t$ , hvor  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

**5.D1.8** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \text{ er et tal.}$$

a) Bestem  $t$ , så  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er parallelle.

**5.D1.9** En plan  $\alpha$  er udspændt af vektorerne

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Punktet  $P(4, -5, 2)$  ligger i planen  $\alpha$ .

a) Bestem en parameterfremstilling for  $\alpha$ .

**5.D1.10** I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(3, -1, 5), B(-1, 0, 2) \text{ og } C(6, 1, 5).$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for den plan, som indeholder punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

**5.D1.11** En plan  $\alpha$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til punktet  $P$  med parameterværdierne  $s = -2$  og  $t = 3$ .  
b) Undersøg, om punktet  $Q(8, 8, 6)$  ligger i planen  $\alpha$ .

**5.D1.12** En plan  $\alpha$  indeholder punktet  $P(1, 4, 5)$  og har normalvektoren

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem en ligning for  $\alpha$  på formen  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ .

**5.D1.13** En plan  $\alpha$  er givet ved ligningen

$$\alpha: -4x + y + 3z = 2.$$

- a) Bestem en ligning for den plan  $\beta$ , der indeholder punktet  $P(6, 1, -3)$ , og som er parallel med  $\alpha$ .

**5.D1.14** En plan  $\alpha$  indeholder punktet  $P(7, -3, 4)$  og har normalvektoren

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Undersøg, om punktet  $Q(-3, 3, 15)$  ligger i planen  $\alpha$ .

**5.D1.15** En plan  $\alpha$  har ligningen

$$\alpha: x + 2y - 6z - 12 = 0.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for planen  $\alpha$ .

**5.D1.16**

En plan  $\alpha$  er givet ved ligningen

$$\alpha: x + 5y - 3z + 9 = 0.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $\alpha$  og  $z$ -aksen.

**5.D1.17**

En plan  $\alpha$  er bestemt ved ligningen

$$\alpha: 2x - y + 2z = 9.$$

- a) Bestem afstanden fra punktet  $P(7, 3, -2)$  til planen  $\alpha$ .

**5.D1.18**

En plan  $\alpha$  er bestemt ved ligningen

$$\alpha: 3x - 2y + 4z = 5.$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for den linje  $l$ , der går gennem punktet  $P(1, -3, 7)$ , og som er vinkelret på  $\alpha$ .

**5.D1.19**

I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(1, 2, -3) \text{ og } B(6, 0, 2).$$

- a) Bestem en parameterfremstilling for den linje  $l$ , der går gennem punkterne  $A$  og  $B$ .  
b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $xz$ -planen.

**5.D1.20**

En linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $xy$ -planen.

**5.D1.21**

To planer  $\alpha$  og  $\beta$  er givet ved ligningerne

$$\alpha: -x + y + z = 5$$

$$\beta: -4x + y - 5z = 2$$

- a) Gør rede for, at planerne  $\alpha$  og  $\beta$  står vinkelret på hinanden.



**5.D1.22** To planer  $\alpha$  og  $\beta$  har ligningerne

$$\alpha: 6x - 3y + 2z - 2 = 0$$

$$\beta: 12x - 6y + 4z - 44 = 0$$

- Gør rede for, at planerne  $\alpha$  og  $\beta$  er parallelle.
- Bestem ved beregning afstanden mellem planerne  $\alpha$  og  $\beta$ .

**5.D1.23** En plan  $\alpha$  er bestemt ved ligningen

$$\alpha: 3x - 6y + 2z = 10,$$

og en linje  $l$  er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $\alpha$  og  $l$ .  
På linjen  $l$  ligger punktet  $P$  med tilhørende parameterværdi  $t = -1$ .
- Bestem afstanden fra  $P$  til  $\alpha$ .

**5.D1.24** En kugle har ligningen

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 169.$$

- Bestem kuglens radius og koordinatsættet til kuglens centrum.

**5.D1.25** En kugle har centrum i punktet  $C(3, -1, 2)$ .

Punktet  $P(5, 2, 8)$  ligger på kuglen.

- Bestem en ligning for kuglen.

**5.D1.26** I et koordinatsystem er en kugle givet ved ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 86 = 0.$$

- Bestem kuglens radius og koordinatsættet til kuglens centrum.

**5.D1.27** En kugle har centrum i punktet  $C(1, 2, -4)$ .

Punktet  $P(7, 3, 5)$  ligger på kuglen.

- Bestem en ligning for kuglens tangentplan i  $P$ .

**5.D1.28** En kugle er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 25 .$$

En plan  $\alpha$  er givet ved ligningen

$$\alpha : 4x + 3z - 48 = 0 .$$

a) Undersøg, om  $\alpha$  er en tangentplan til kuglen.

**5.D1.29** En kugle har centrum i punktet  $C(5,1,-3)$  og  $xy$ -planen som tangentplan.

a) Bestem en ligning for kuglen.

**5.D1.30** En kugle har centrum i punktet  $C(-7,5,5)$  .

Planen  $\alpha$  bestemt ved ligningen

$$\alpha : 8x - 4y + z = 10$$

er tangentplan til kuglen.

a) Bestem en ligning for kuglen.

## Delpøve 2

**5.D2.1** I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(-12, 5, 11), B(6, 7, -4) \text{ og } C(3, -9, 2).$$

Punkterne er hjørner i en trekant  $ABC$ .

- Bestem  $\angle C$  i trekant  $ABC$ .
- Bestem ved beregning arealet af trekant  $ABC$ .

**5.D2.2** To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

- Gør rede for, at  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  udspænder et kvadrat.

**5.D2.3** En plan  $\alpha$  har ligningen

$$\alpha: 5x - y + 2z - 5 = 0,$$

og en linje  $l$  har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestem ved beregning koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $\alpha$ .
- Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem  $l$  og  $\alpha$ .

**5.D2.4** I et koordinatsystem i rummet er givet de fire punkter

$$P(1, 2, -1), Q(3, -1, 1), R(2, 0, -3) \text{ og } S(2, -2, -15).$$

- Undersøg, om de fire punkter ligger i samme plan.

**5.D2.5** En plan  $\alpha$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestem en ligning for  $\alpha$ .

**5.D2.6** En plan  $\alpha$  er givet ved ligningen

$$\alpha: 2x + 5y - 3z + 2 = 0,$$

og en linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestem ved beregning koordinatsættet til skæringspunktet mellem  $l$  og  $\alpha$ .
- Bestem den spidse vinkel mellem  $l$  og  $\alpha$ .
- Bestem en ligning for den plan  $\beta$ , der indeholder  $l$  og punktet  $O(0,0,0)$ .

**5.D2.7** I et koordinatsystem i rummet er der givet tre punkter

$$A(9, -3, 2), B(-8, 2, 0) \text{ og } C(1, 5, 7).$$

- Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der indeholder punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

Et punkt  $P$  har koordinatsættet  $P(-3, -6, 8)$ .

- Bestem ved brug af en formel afstanden fra punktet  $P$  til planen  $\alpha$ .

**5.D2.8** En plan  $\alpha$  har ligningen

$$\alpha: -4x + z - 5 = 0.$$

En linje  $l$  har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

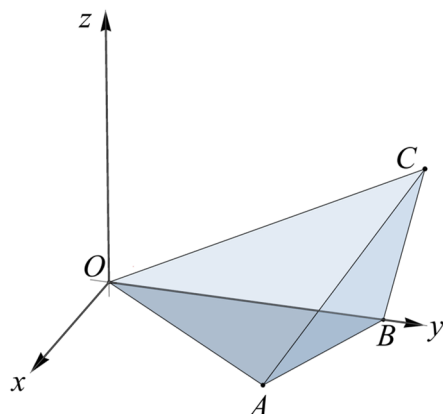
- Bestem ved beregning koordinatsættet til det punkt  $P$ , hvor  $l$  skærer  $\alpha$ .

En plan  $\beta$  har ligningen

$$\beta: x - y + 3z + 6 = 0.$$

- Bestem den spidse vinkel mellem  $\alpha$  og  $\beta$ .

5.D2.9



$$O(0,0,0)$$

$$A(4,5,0)$$

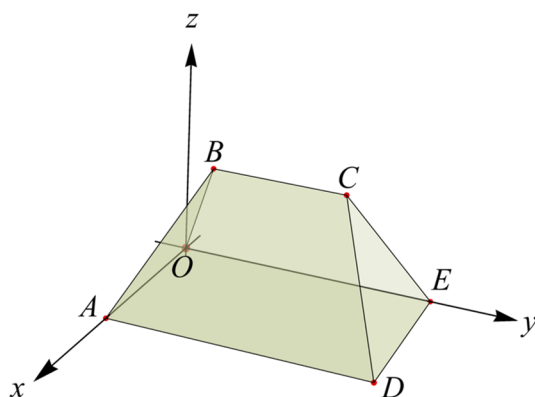
$$B(0,7,0)$$

$$C(3,8,5)$$

Figuren viser en skæv pyramide  $OABC$  i et koordinatsystem i rummet.

- Bestem en parameterfremstilling for den linje, der går gennem punkterne  $A$  og  $C$ .
- Bestem en ligning for den plan, der indeholder punkterne  $O$ ,  $A$  og  $C$ .
- Bestem ved beregning den vinkel, som sidefladen  $OAC$  danner med grundfladen  $OAB$ .

5.D2.10



$$O(0,0,0)$$

$$A(200,0,0)$$

$$B(100,75,150)$$

$$C(100,225,150)$$

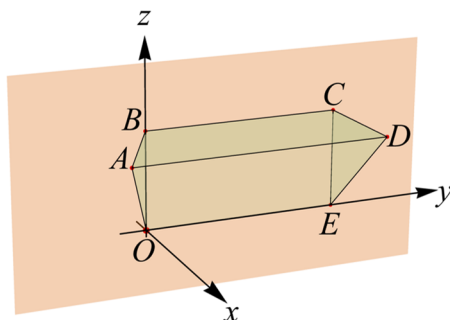
$$D(200,300,0)$$

$$E(0,300,0)$$

Figuren viser en model af et spejldertelt indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser. Koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren.

- Bestem en ligning for den plan, der indeholder punkterne  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$ .
- Bestem den vinkel, som fladerne  $ABCD$  og  $CDE$  danner med hinanden.
- Bestem ved beregning arealet af sidefladen  $CDE$  på teltet.

## 5.D2.11



$$\begin{aligned} O(0,0,0) \\ A(40,-25,60) \\ B(0,0,75) \\ C(0,150,75) \\ D(40,175,60) \\ E(0,150,0) \end{aligned}$$

Figuren viser en model af en åben opbevaringskasse, der hænger på en mur. Modellen er indlagt i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser.

Frontfladen  $OADE$  ligger i en plan  $\alpha$ , og bagsiden  $OBCE$  ligger i en plan  $\beta$ .

- Bestem arealet af frontfladen  $OADE$ .
- Bestem ved beregning den spidse vinkel mellem frontfladen  $OADE$  og bagsiden  $OBCE$ .

5.D2.12 En kugle har centrum i  $C(7,-3,8)$  og radius 6.

- Bestem en ligning for kuglen.

Punktet  $P(5,1,12)$  ligger på kuglen.

- Bestem en ligning for tangentplanen  $\alpha$  til kuglen i punktet  $P$ .

## 5.D2.13 En kugle er givet ved ligningen

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36.$$

- Bestem ved beregning koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem kuglen og  $y$ -aksen.

## 5.D2.14 En kugle er givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 49,$$

og en linje  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestem ved beregning koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen  $l$  og kuglen.

## 6. Funktioner og differentialregning

### Delprøve 1

6.D1.1

To lineære funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

6.D1.2

En lineær funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 3x - 6.$$

- a) Undersøg, om punktet  $P(5,9)$  ligger på grafen for  $f$ .  
b) Bestem koordinatsættet til grafens skæringspunkt med  $x$ -aksen.

6.D1.3

Grafen for en eksponentiel udvikling

$$f(x) = b \cdot a^x$$

går gennem to punkter  $P(4,2)$  og  $Q(7,16)$ .

- a) Bestem tallene  $a$  og  $b$ .

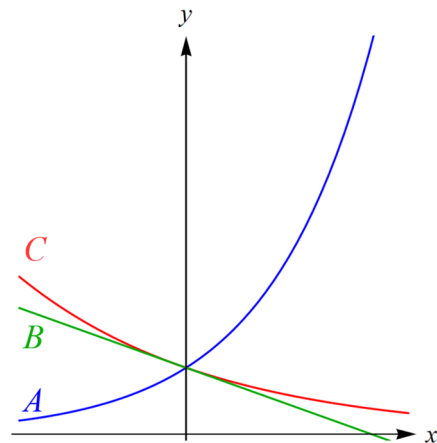
6.D1.4

En eksponentiel funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = 10 \cdot 0,75^x.$$

Figuren viser graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$ .Én af graferne er graf for  $f$ .

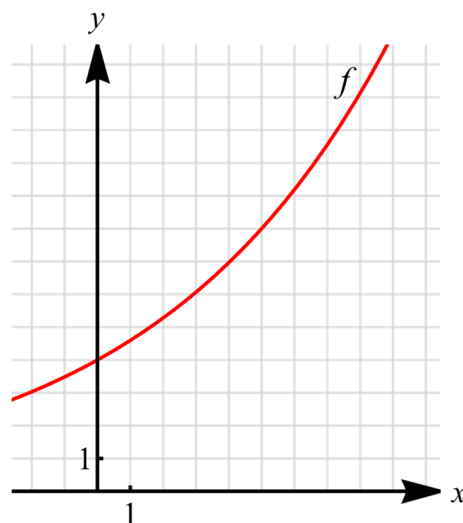
- a) Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for  $f$ , og hvorfor det ikke kan være de to andre.



6.D1.5

Figuren viser grafen for en eksponentielt voksende funktion  $f$ .

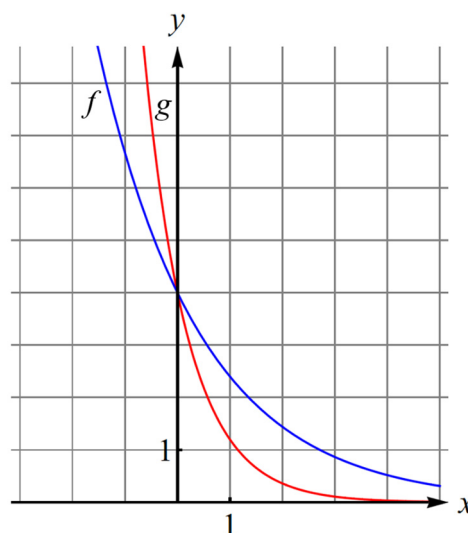
- a) Bestem fordoblingskonstanten  $T_2$  ved aflæsning på grafen. Brug bilaget.



6.D1.6

På figuren ses graferne for to eksponentielle funktioner  $f$  og  $g$ .

- a) Gør rede for, hvilken af funktionerne der har den største halveringskonstant. Brug bilaget.



6.D1.7

I 2020 kostede en aktie i et medicinalfirma 320 kr. I de efterfølgende år er aktien steget med 16 % pr. år.

- a) Indfør passende variable, og opstil en model, der kan bruges til at beregne værdien af aktien  $x$  år efter 2020.

6.D1.8

En vinterdag stilles en sodavand til afkøling udenfor. I en model kan sodavandens temperatur beskrives ved funktionen

$$f(x) = 22 \cdot 0,983^x,$$

hvor  $f(x)$  er sodavandens temperatur (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ), og  $x$  er antal minutter, efter at sodavanden blev stillet til afkøling.

- a) Gør rede for, hvad tallene 22 og 0,983 fortæller om sodavandens temperatur.



**6.D1.9**

To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

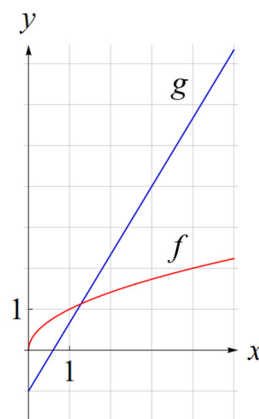
$$g(x) = \ln(x - 2)$$

a) Bestem  $f(2)$  og  $g(f(2))$ .

**6.D1.10**

Figuren viser graferne for to funktioner  $f$  og  $g$ .

a) Bestem  $g(3)$  og  $f(g(3))$ .  
Brug bilaget.



**6.D1.11**

To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 4$$

$$g(x) = x + 1$$

a) Bestem  $g(2)$  og  $f(g(2))$ .

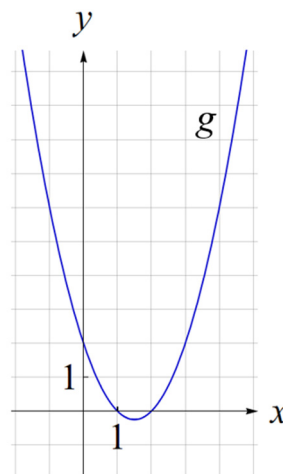
**6.D1.12**

En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = -x + 4.$$

Figuren viser grafen for en anden funktion  $g$ .

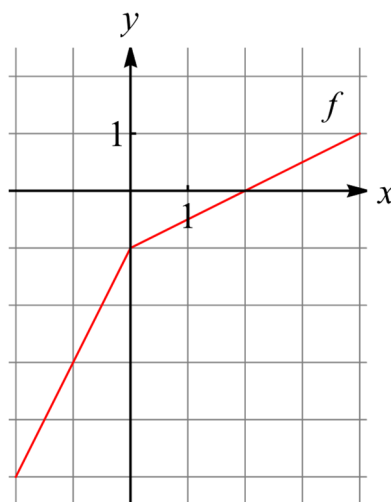
a) Bestem  $f(1)$  og  $g(f(1))$ .  
Brug bilaget.



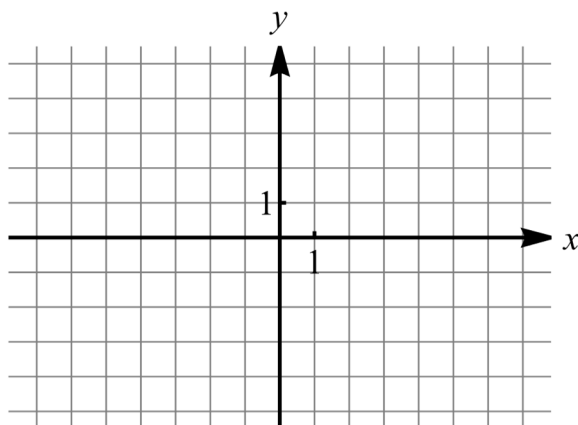
6.D1.13

På figuren ses grafen for en stykkevist defineret funktion  $f$ .

- a) Opstil en gaffelforskrift for funktionen  $f$ .



6.D1.14



En stykkevist defineret funktion  $f$  er givet ved gaffelforskriften

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1, & -4 \leq x < 2 \\ 2x - 6, & 2 \leq x < 5 \end{cases}.$$

- a) Tegn grafen for  $f$ .  
Brug bilaget.

6.D1.15

En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 + 4 \cdot x - 1.$$

- a) Bestem  $x$ -koordinaten til parablens toppunkt.

**6.D1.16** En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  med forskriften

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 8.$$

- Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvor parablen skærer  $x$ -aksen.
- Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

**6.D1.17** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6.$$

- Gør rede for, at grafen for  $f$  skærer  $x$ -aksen to gange.

Et andengradspolynomium  $g$  er givet ved

$$g(x) = 2x^2 + 4x + c, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

- Bestem tallet  $c$ , så grafen for  $g$  har netop ét punkt fælles med  $x$ -aksen.

**6.D1.18** Et andengradspolynomium  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 + b \cdot x + c, \text{ hvor } b \text{ og } c \text{ er tal.}$$

Grafen for  $f$  har toppunkt i  $T(-2, 1)$ .

- Bestem tallene  $b$  og  $c$ .

**6.D1.19** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- Vis, at punktet  $P(4, 7)$  ikke ligger på grafen for  $f$ .
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(4, f(4))$ .

**6.D1.20** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 - 2x + 7.$$

- Udfyld nedenstående tabel, og tegn en skitse af grafen for  $f$  på bilaget.

|        |    |    |   |   |   |    |
|--------|----|----|---|---|---|----|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
| $f(x)$ | 15 |    |   | 6 |   | 10 |

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet med  $x$ -koordinat 3.

**6.D1.21** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

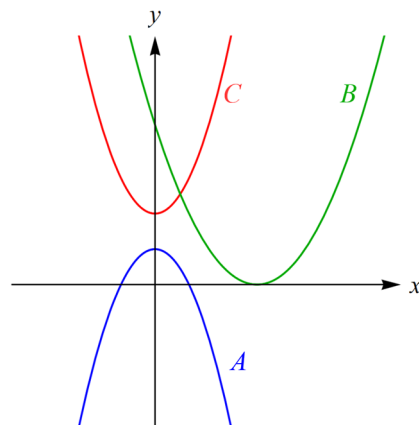
- Bestem nulpunkterne for  $f$ .
- Løs ligningen  $f'(x) = 0$ , og forklar, hvad løsningen fortæller om grafen for  $f$ .

**6.D1.22** Figuren viser tre parabler  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Den ene af parablerne er graf for andengradspolynomiet  $f$  givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

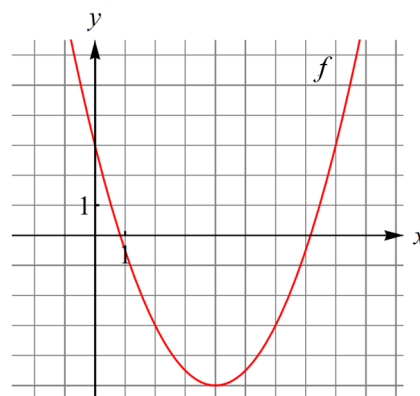
Det oplyses, at  $a > 0$ , og at  $b = 0$ .

- Gør rede for, hvilken af parablerne der er graf for  $f$ . Begrund svaret.



**6.D1.23** Figuren viser grafen for et andengradspolynomium  $f$ .

- Afgør for hver af nedenstående påstande, om den er sand eller falsk. Begrund svaret. Brug bilaget.
  - $f(0) = 7$ .
  - $f$  har to rødder.
  - $f'(0)$  er et negativt tal.

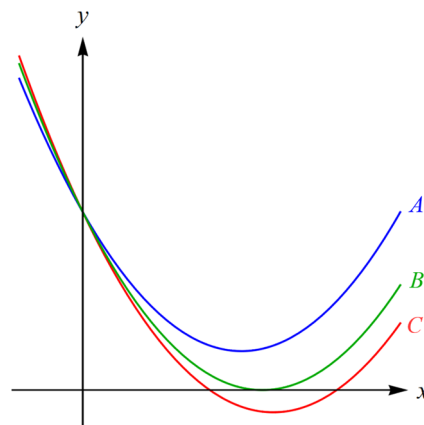


**6.D1.24** Et andengradspolynomium  $f$  er bestemt ved

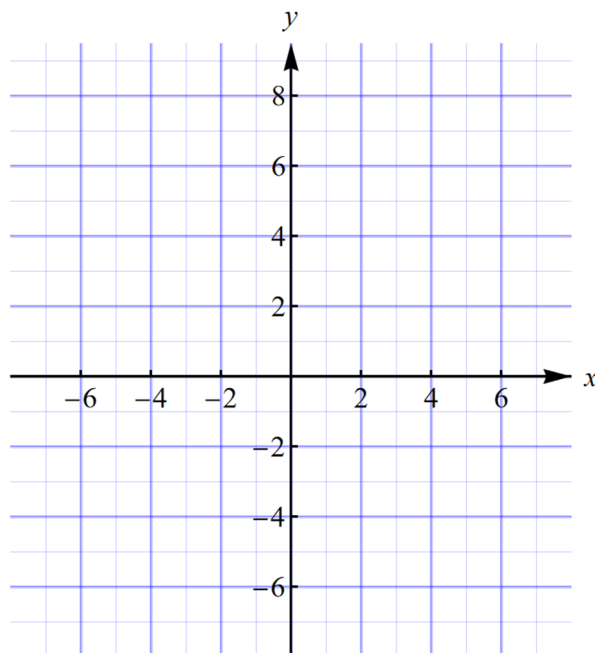
$$f(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Figuren viser tre parabler  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Én af parablerne er graf for  $f$ .

- Gør rede for, hvilken af parablerne der er graf for  $f$ .



6.D1.25



Om andengradspolynomiet  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  oplyses følgende:

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(-2, 7)$ ,

tallet  $a$  er negativt,

tallet  $c$  er positivt.

- a) Tegn en skitse af grafen for  $f$ . Brug bilaget.  
(Der er mange muligheder for, hvordan en sådan graf kan se ud.  
Der ønskes kun tegnet én mulig graf).

6.D1.26

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^2 - 8x + 17,$$

og en linje  $l$  er givet ved ligningen  $y = 2$ .

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og linjen  $l$ .

6.D1.27

To andengradspolynomier  $f$  og  $g$  er givet ved forskrifterne

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 11$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + k, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

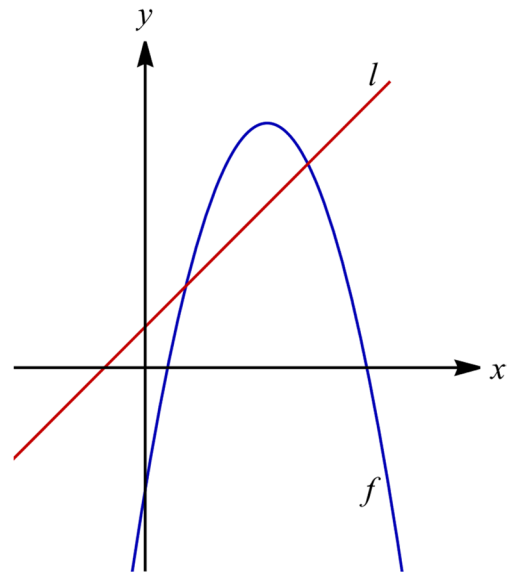
- a) Bestem tallet  $k$ , så grafen for  $f$  og grafen for  $g$  har toppunkt i samme punkt.

**6.D1.28** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 6x - 3.$$

På figuren ses grafen for  $f$  sammen med en linje  $l$  givet ved ligningen  $y = x + 1$ .

- a) Bestem  $x$ -koordinaten til hvert af de to skæringspunkter mellem grafen for  $f$  og linjen  $l$ .



**6.D1.29** Et andengradspolynomium  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1.$$

Linjen  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 3x + 2.$$

- b) Gør rede for, at grafen for  $f$  og linjen  $l$  ikke har nogen punkter fælles.

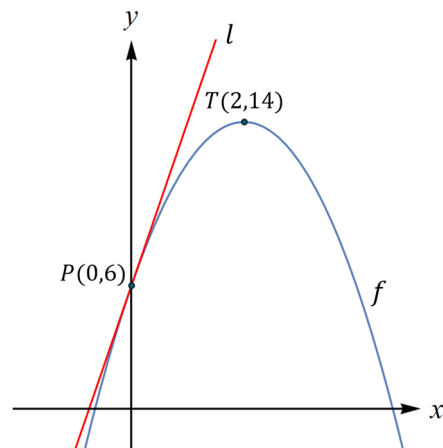
**6.D1.30** En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parablens toppunkt er  $T(2,14)$ .

Parablens tangent  $l$  i punktet  $P(0,6)$  har ligningen  $y = 8x + 6$ .

- a) Bestem tallene  $a$ ,  $b$  og  $c$ .



**6.D1.31** Et andengradspolynomium  $f$  har rødderne  $x_1 = 2$  og  $x_2 = 4$ .

Desuden går grafen for  $f$  gennem punktet  $P(0,16)$ .

- a) Bestem en forskrift for  $f$ .

**6.D1.32** En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 - 8x + c, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem tallet  $c$ , så  $y$ -koordinaten til parablens toppunkt er lig 2.

**6.D1.33** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = e^x + x^3.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.34** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.35** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x}.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.36** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

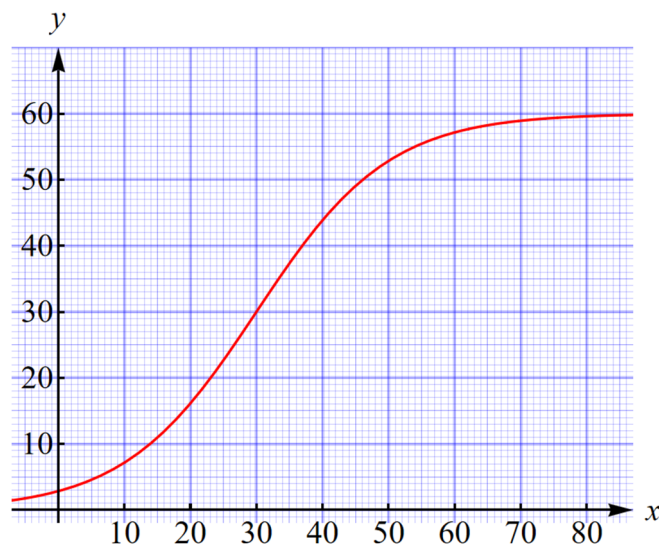
$$f(x) = x^2 - 3x + 1.$$

- a) Bestem  $f'(2)$ .

**6.D1.37** Om en funktion  $f$  oplyses, at  $f(2) = 5$  og  $f'(2) = 3$ .

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(2, f(2))$ .

6.D1.38



Grafen viser udviklingen i antallet af individer  $y$  i en bestemt population af dyr, hvor  $x$  angiver antallet af måneder efter første optælling.

- a) Bestem ved aflæsning væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet  $x = 30$ .

6.D1.39

En funktion  $f$  har forskriften

$$f(x) = 4 \cdot \ln(x) - 2x + 3.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(1, f(1))$ .

6.D1.40

En funktion  $f$  er givet ved

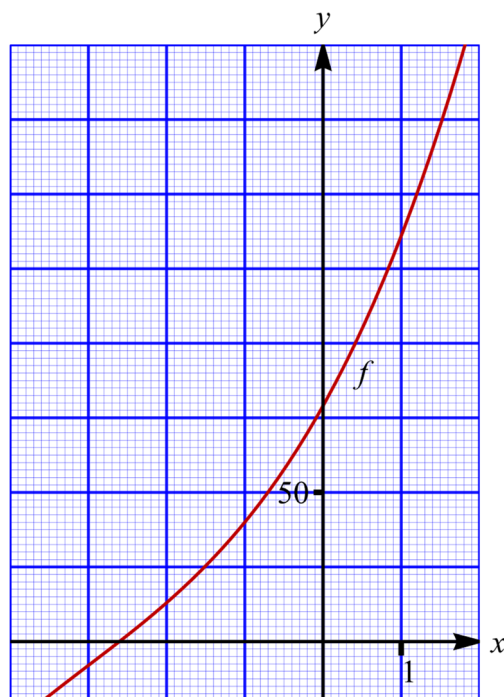
$$f(x) = 3x^2 + 2x - 5.$$

En linje  $l$  er bestemt ved ligningen  $y = -4x + 13$ .

- a) Undersøg, om  $l$  er tangent til grafen for  $f$ .



6.D1.41



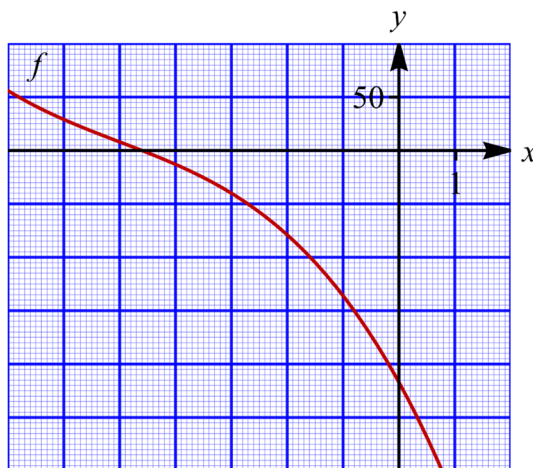
På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

Man kan ved hjælp af Newtons metode bestemme en tilnærmet værdi for nulpunktet for  $f$ .

Lad  $x_1 = 1$  være startgættet i Newtons metode.

- a) Tegn den tangent, der hører til bestemmelsen af  $x_2$ .  
Brug bilaget.

## 6.D1.42



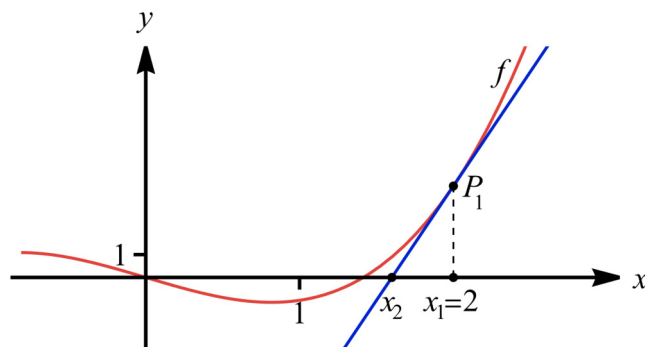
På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

Man kan ved hjælp af Newtons metode bestemme en tilnærmet værdi for nulpunktet for  $f$ .

Lad  $x_1 = -1$  være startgættet i Newtons metode.

- a) Tegn den tangent, der hører til bestemmelsen af  $x_2$ .  
Brug bilaget.

## 6.D1.43



En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 - 2x.$$

Man kan ved hjælp af Newtons metode bestemme en tilnærmet værdi for et nulpunkt for  $f$ .

Lad  $x_1 = 2$  være startgættet i Newtons metode.

- a) Bestem ved beregning  $x_2$ .

**6.D1.44** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \cdot \ln(x).$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.45** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = e^x \cdot \sqrt{x} + x^2.$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.46** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

a) Bestem  $f'(0)$ .

**6.D1.47** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (2x + 4)^5.$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.48** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (x^2 + 3x - 1)^4.$$

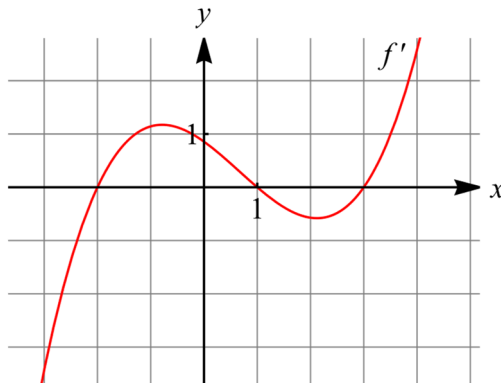
a) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.49** En funktion  $f$  har forskriften

$$f(x) = \ln(x^2 - 3).$$

a) Bestem  $f'(2)$ .

6.D1.50



Figuren viser grafen for den afledede funktion  $f'$  for en funktion  $f$ .

- a) Bestem monotoniforholdene for  $f$  i intervallet  $[-3; 4]$ .  
Brug bilaget.

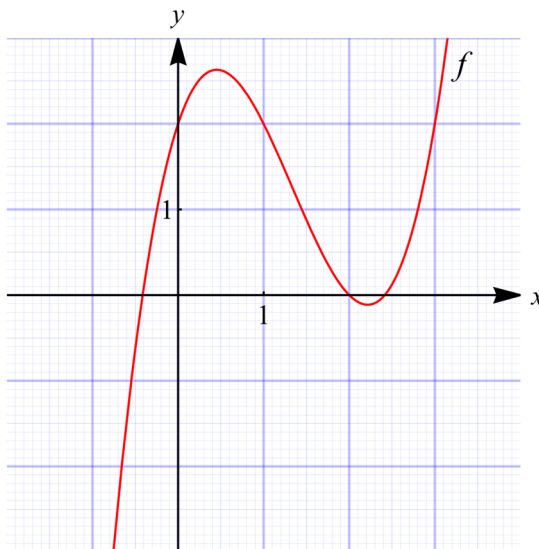
6.D1.51

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = e^x + x.$$

- a) Gør rede for, at  $f$  er en voksende funktion.

6.D1.52



På figuren ses grafen for et tredjegradspolynomium  $f$ .

Nedenfor ses tre påstande:

Påstand 1:  $f(1) = 1$ .

Påstand 2: Ligningen  $f(x) = 0$  har tre løsninger.

Påstand 3:  $f'(1) > 0$ .

- a) Argumentér for hver påstand, om den er korrekt eller forkert. Brug bilaget.

**6.D1.53** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 5.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .
- b) Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

**6.D1.54** En funktion  $f$  er bestemt ved

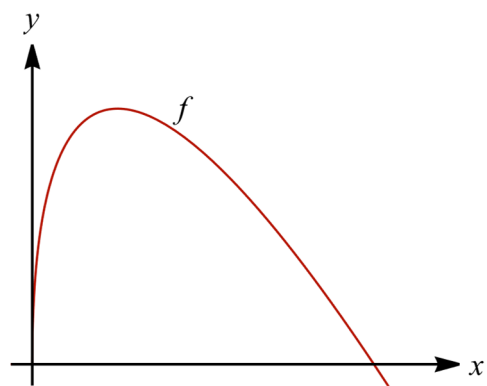
$$f(x) = 20 \cdot \ln(x) - 4x, \quad x > 0.$$

- a) Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

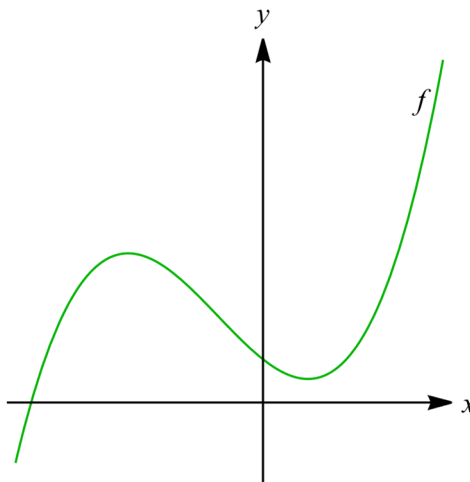
**6.D1.55** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = 12 \cdot \sqrt{x} - 3x.$$

- a) Bestem maksimum for  $f$ .



6.D1.56



På figuren ses grafen for en funktion  $f$  givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 11.$$

Grafen for  $f$  har to vandrette tangenter.

- a) Bestem  $x$ -koordinaten til hvert af røringpunkterne for de to vandrette tangenter.

6.D1.57

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .
- b) Vis, at grafen for  $f$  har vandrette tangenter ved  $x = 1$  og  $x = 3$ .

6.D1.58

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 8.$$

- a) Bestem  $f'(x)$ .

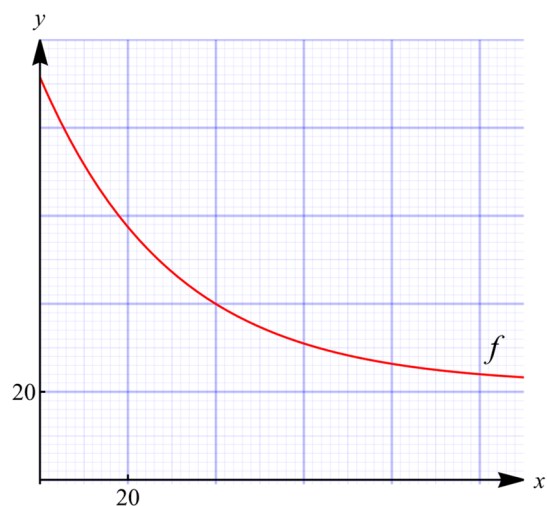
Det oplyses, at løsningerne til ligningen  $f'(x) = 0$  er  $x = -1$  og  $x = 5$ .

- b) Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

6.D1.59



Billedkilde: pixabay

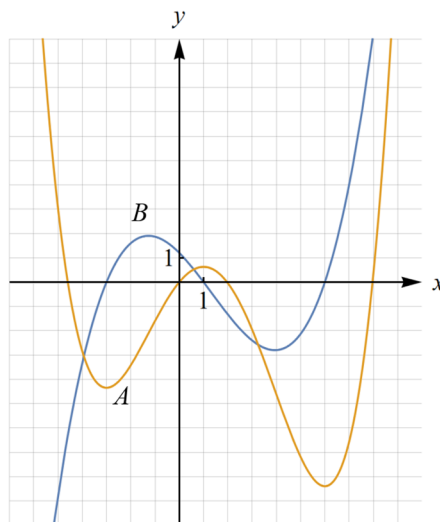


I en model for afkølingen af en kop kaffe betegner  $f(x)$  kaffens temperatur (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ) til tidspunktet  $x$  (målt i minutter, efter at kaffen blev hældt op i koppen).

På figuren ses en del af grafen for  $f$ .

- Bestem ved aflæsning på bilaget, hvor lang tid der går, fra kaffen blev hældt op i koppen, til dens temperatur er  $60^{\circ}\text{C}$ .
- Bestem ved aflæsning på bilaget  $f'(40)$ , og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen i kaffens temperatur.

6.D1.60



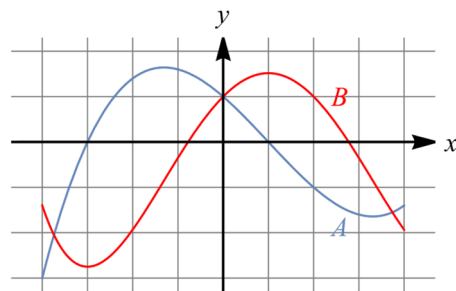
Figuren viser graferne for en funktion  $f$  og dens afledede funktion  $f'$ .

- Gør rede for, om det er graf A eller graf B, der er graf for  $f$ . Brug bilaget.

6.D1.61

Figuren viser graferne for en funktion  $f$  og dens afledede funktion  $f'$  i intervallet  $[-4; 4]$ .

- a) Gør rede for, om det er graf  $A$  eller graf  $B$ , der er graf for  $f$ .  
Brug bilaget.

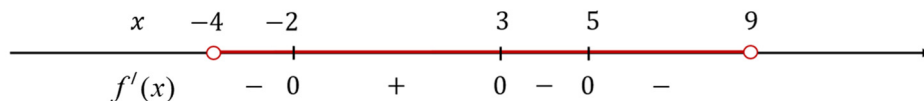


6.D1.62

Om en differentiabel funktion  $f$  med definitionsmængde  $] -4; 9[$  gælder der, at

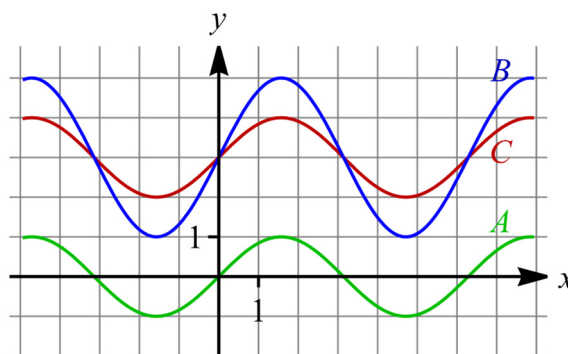
$$f(-2) = 5, \quad f(3) = 7 \quad \text{og} \quad f(5) = 1.$$

Nulpunkter og fortegn for  $f'(x)$  er angivet på fortegnslinjen herunder:



- a) Tegn en skitse af grafen for  $f$ . Brug bilaget.  
(Der er mange muligheder for, hvordan en sådan graf kan se ud.  
Der ønskes kun tegnet én mulig graf).

6.D1.63



På figuren ses graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  for tre harmoniske svingninger.

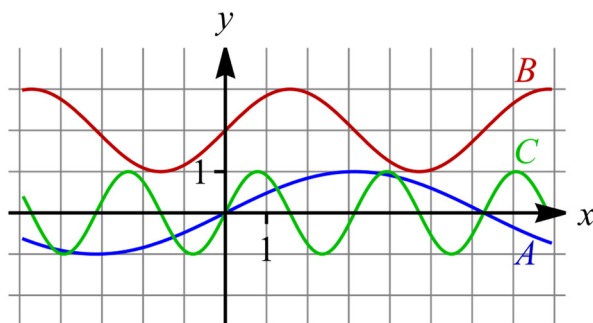
En af graferne er graf for funktionen

$$f(x) = \sin(x) + 3.$$

- a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer  $A$ ,  $B$  og  $C$  der er graf for  $f$ , og gør rede for, hvorfor det ikke kan være de to andre.



6.D1.64



På figuren ses graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  for tre harmoniske svingninger.

$A$ ,  $B$  og  $C$  er grafer for følgende tre funktioner

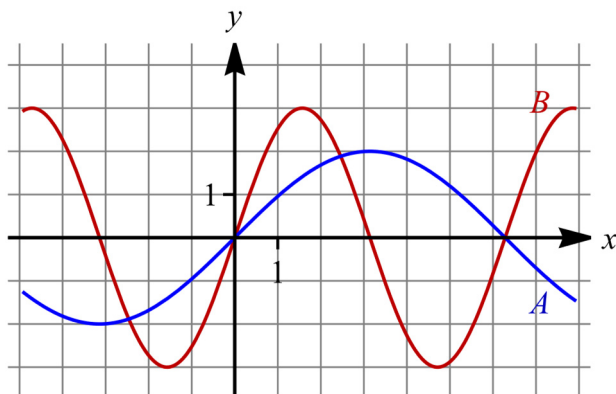
$$f(x) = \sin(x) + 2$$

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$g(x) = \sin(2x)$$

- a) Gør for hver af graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  rede for, hvilken af funktionerne  $f$ ,  $g$  og  $h$  den hører til.

6.D1.65



På figuren ses graferne  $A$  og  $B$  for to harmoniske svingninger.

$A$  og  $B$  er grafer for to af følgende funktioner

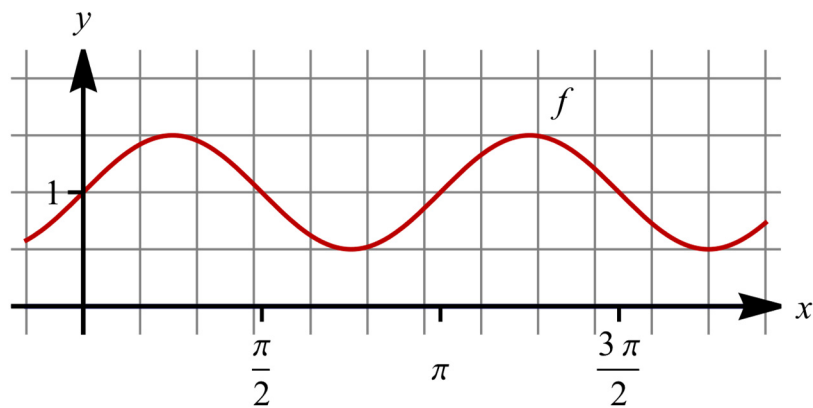
$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$g(x) = 3 \cdot \sin(x)$$

$$h(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

- a) Gør for hver af graferne  $A$  og  $B$  rede for, hvilken af funktionerne  $f$ ,  $g$  og  $h$  den hører til.

6.D1.66



På figuren ses grafen for funktionen  $f$  givet ved forskriften

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + d.$$

- a) Bestem konstanterne  $A$ ,  $\omega$  og  $d$  ved aflæsning på figuren. Brug bilaget.

6.D1.67

En harmonisk svingning  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 3, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

- a) Udfyld resten af tabellen i bilaget.  
Tegn en skitse af grafen for  $f$ . Brug bilaget.

|        |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|
| $x$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 3 |   |   | 1 |   |

6.D1.68

En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

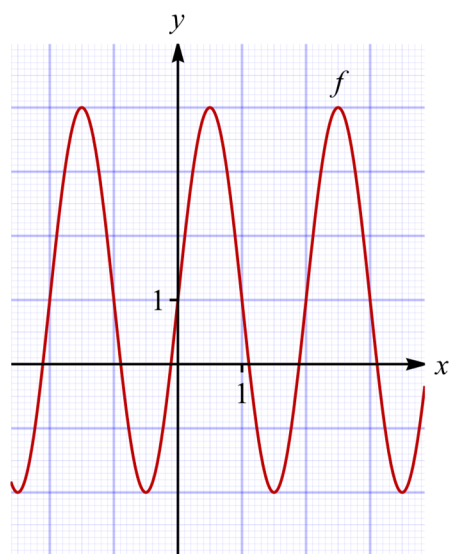
$$f(x) = 5 \cdot \sin(\pi \cdot x + 3) - 1.$$

- a) Bestem amplituden og perioden for den harmoniske svingning.

6.D1.69

Figuren viser grafen for en harmonisk svingning  $f$ .

- a) Bestem amplituden og perioden for den harmoniske svingning ved aflæsning på figuren. Brug bilaget.



6.D1.70

En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

$$f(x) = 4 \cdot \sin(x) - 2.$$

- a) Bestem størsteværdi og mindsteværdi for  $f$ .

6.D1.71

En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 4.$$

- a) Gør rede for, at ligningen  $f(x) = 0$  ikke har nogen løsninger.

6.D1.72

En harmonisk svingning  $f$  er for  $0 \leq x \leq 2\pi$  givet ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 5.$$

- a) Bestem de værdier af tallet  $k$ , hvor ligningen  $f(x) = k$  ikke har nogen løsninger.

6.D1.73

En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + d.$$

Det oplyses, at

- 1)  $f$  har en periode på  $\pi$ .
  - 2)  $f(0) = 4$ .
  - 3) Maksimum for  $f$  er lig med 7.
- a) Bestem tallene  $A$ ,  $\omega$  og  $d$ .

**6.D1.74** En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(4\pi \cdot x) + 3.$$

- a) Bestem perioden for den harmoniske svingning  $f$ .
- b) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.75** En harmonisk svingning  $f$  er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + 3.$$

- a) Bestem  $f(\pi)$ .
- b) Bestem  $f'(x)$ .

**6.D1.76** Vandstanden i en havn ændrer sig i takt med tidevandet.

I en model kan vandstanden i løbet af et bestemt døgn beskrives ved funktionen

$$f(x) = 1,2 \cdot \sin(0,51 \cdot x - 1,5) + 6,0, \quad 0 \leq x \leq 24,$$

hvor  $f(x)$  er vandstanden (målt i meter over havnens bund) til tidspunktet  $x$  (målt i timer efter midnat).

- a) Bestem den højeste og laveste vandstand i løbet af døgnet.

**6.D1.77** Et barn gynger frem og tilbage på en gynges.

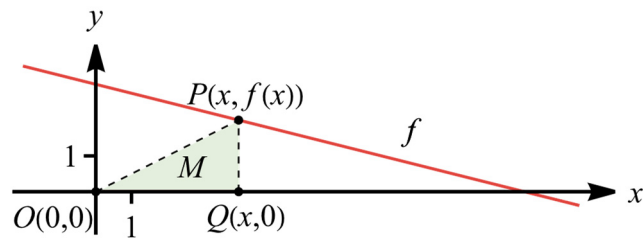
I en model kan gyngens højde over jorden beskrives ved

$$f(x) = 0,4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 1,3,$$

hvor  $f(x)$  er gyngens højde over jorden (målt i meter) til tidspunktet  $x$  (målt i sekunder efter første højdemåling).

- a) Bestem gyngens maksimale højde over jorden.
- b) Bestem tallet  $f(4)$ .  
Gør rede for betydningen af tallet.

6.D1.78



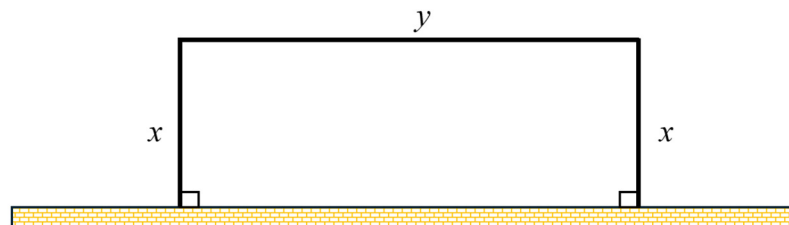
Figuren viser grafen for funktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + 3.$$

Punkterne  $O(0,0)$ ,  $P(x, f(x))$  og  $Q(x,0)$ , hvor  $0 < x < 12$ , udgør hjørnerne i en trekant.

- a) Bestem den værdi af  $x$ , hvor arealet af trekant  $OPQ$  er størst.

6.D1.79



En hundeejer skal anlægge en rektangulær hundegård op ad en mur. Hundegården skal indhegnes, men der skal ikke være hegn op ad muren.

På figuren ses en model af hundegården, hvor sidelængderne er  $x$  og  $y$ .

Den samlede længde af hegnet er 30 meter.

Hundeejeren overvejer at anlægge hundegården, så  $x$  er 6 meter.

- a) Bestem sidelængden  $y$ , hvis  $x = 6$ .  
Bestem arealet af hundegården med disse værdier af  $x$  og  $y$ .

Hundeejeren beslutter sig i stedet for at anlægge hundegården, så arealet bliver størst muligt.

- b) Opstil et udtryk for hundegårdens areal  $A(x)$ .  
Bestem den værdi af  $x$ , hvor hundegårdens areal bliver størst muligt.

## Delprøve 2

**6.D2.1** To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = 3 \cdot 1,2^x$$

- a) Bestem ved beregning koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

**6.D2.2** En funktion er givet ved forskriften

$$f(x) = 2 \cdot \log(x) + x^2 - k \cdot x, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

Det oplyses, at  $f(10) = 22$ .

- a) Bestem tallet  $k$ .

**6.D2.3** En bestemt type badebolde fås i forskellige størrelser. Rumfanget af en sådan badebold kan beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{\pi}{6} \cdot x^3, \quad x > 0,$$

hvor  $f(x)$  er badeboldens rumfang (målt i  $\text{cm}^3$ ), og  $x$  er dens diameter (målt i  $\text{cm}$ ).

- a) Bestem rumfanget af en badebold med diameteren 40  $\text{cm}$ .  
b) Bestem diameteren af en badebold med rumfanget  $1000 \text{ cm}^3$ .

Peter har to badebolde i forskellig størrelse. Den store badebolds diameter er 20 % større end den lille badebolds diameter.

- c) Hvor mange procent er den store badebolds rumfang større end den lille badebolds rumfang?

**6.D2.4** En potensfunktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

Grafen for  $f$  går gennem punkterne  $P(2,7)$  og  $Q(15,11)$ .

- a) Bestem en forskrift for  $f$ .

**6.D2.5** Nedenstående tabel viser udviklingen i indbyggertallet i Delhi i perioden 2016-2022.

| Årstal              | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Indbyggertal i mio. | 26,7 | 27,6 | 28,5 | 29,4 | 30,3 | 31,2 | 32,1 |

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor  $f(x)$  angiver indbyggertallet (målt i mio.) i Delhi  $x$  år efter 2016.

- Bestem  $a$  og  $b$  ved regression på tabellens data.
- Bestem, hvor meget befolkningstallet ifølge modellen stiger med på 10 år.
- Hvornår vil befolkningstallet i Delhi nå op på 40 mio.?

Kilde: worldpopulationreview

**6.D2.6** Nedenstående tabel viser udviklingen i indbyggertallet i Canada i perioden 1964-2024.

|                     |    |    |     |    |    |
|---------------------|----|----|-----|----|----|
| Antal år efter 1964 | 0  | 5  | ... | 55 | 60 |
| Indbyggertal i mio. | 19 | 21 | ... | 38 | 39 |

Hele tabellen med alle 13 datapunkter findes i bilaget "Befolkningstal i Canada.xlsx"

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor  $f(x)$  er indbyggertallet (målt i mio.) i Canada  $x$  år efter 1964.

- Bestem en forskrift for  $f$  ved brug af lineær regression.
- Gør rede for, hvad tallet  $a$  fortæller om udviklingen i indbyggertallet i Canada.
- Løs ligningen  $f(x) = 45$ , og forklar, hvad løsningen fortæller om indbyggertallet i Canada.

Kilde: worldometers

- 6.D2.7** Tabellen viser antal kørte km (målt i tusinde) for førerløse taxaer i Californien for hver måned i perioden april 2024 til maj 2025.

|                                 |     |     |     |     |     |
|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Antal måneder efter april 2024  | 0   | 1   | ... | 12  | 13  |
| Antal kørte km (målt i tusinde) | 0,3 | 0,6 | ... | 3,5 | 4,1 |

Hele tabellen med alle 14 datapunkter findes i bilaget "førerløsetaxaer.xlsx"

I en model kan udviklingen i antallet af kørte km beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor  $f(x)$  er det månedlige antal kørte km (målt i tusinde)  $x$  måneder efter april 2024.

- a) Bestem en forskrift for  $f$  ved brug af lineær regression.

Kilde: ourworldindata

- 6.D2.8** Nedenstående tabel viser udviklingen i indbyggertallet i Egypten i perioden 1960-2000.

|                     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Antal år efter 1960 | 0    | 5    | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 35   | 40   |
| Indbyggertal i mio. | 26,9 | 30,6 | 34,6 | 38,9 | 44,0 | 50,7 | 58,4 | 65,7 | 73,1 |

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor  $f(x)$  er indbyggertallet (målt i mio.) i Egypten  $x$  år efter 1960.

- a) Benyt tabellens oplysninger til at bestemme tallene  $a$  og  $b$  ved eksponentiel regression.
- b) Gør rede for, hvad tallet  $a$  fortæller om udviklingen i indbyggertallet i Egypten.

I 2024 var indbyggertallet i Egypten 117,0 mio.

- c) Bestem  $f(64)$ , og undersøg, om 117,0 mio. afviger mere end 10 % fra modellens befolkningstal i 2024.

Kilde: worldpopulationreview



**6.D2.9** Nedenstående tabel viser udviklingen i antallet af medlemmer i danske basketballklubber i perioden 2018-2023.

|                     |       |       |     |       |       |
|---------------------|-------|-------|-----|-------|-------|
| Antal år efter 2018 | 0     | 1     | ... | 4     | 5     |
| Antal medlemmer     | 15030 | 16032 | ... | 21638 | 22735 |

*Hele tabellen med alle 6 datapunkter findes i bilaget "Antal medlemmer.xlsx"*

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor  $f(x)$  er antallet af medlemmer i danske basketballklubber  $x$  år efter 2018.

- Bestem  $a$  og  $b$  ved regression på tabellens data.
- Bestem antallet af medlemmer i år 2030 ifølge modellen.
- Hvor mange procent stiger antallet af medlemmer med på 10 år?

*Kilde: dgi*

**6.D2.10** Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier for et penduls snorlængde og svingningstid.

|                     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Snorlængde (m)      | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| Svingningstid (sek) | 0,6 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |

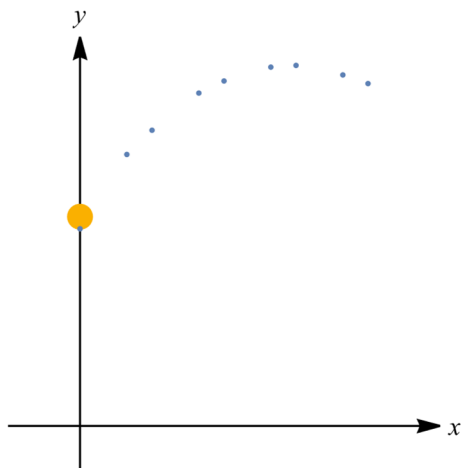
I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor  $f(x)$  er svingningstiden (målt i sekunder), og  $x$  er snorlængden (målt i meter).

- Bestem en forskrift for  $f$  ved brug af regression.
- Bestem svingningstiden for et pendul på 1,5 meter.
- Hvor mange procent stiger svingningstiden, hvis snorlængden øges med 30 %?

## 6.D2.11



En basketball kastes. Boldens højde over gulvet til forskellige tidspunkter registreres. Nedenstående tabel viser de målte værdier.

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Tid (målt i sekunder) | 0,00 | 0,13 | 0,20 | 0,33 | 0,40 | 0,53 | 0,60 | 0,73 | 0,80 |
| Højde (målt i cm)     | 242  | 314  | 342  | 385  | 399  | 415  | 417  | 406  | 396  |

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor  $f(x)$  er højden (målt i cm) over gulvet, og  $x$  er tiden (målt i sekunder), efter at bolden slippes.

- Benyt tabellens oplysninger til at bestemme tallene  $a$ ,  $b$  og  $c$  ved regression.
- Hvor lang tid, efter at bolden slippes, vil den ifølge modellen ramme jorden?

**6.D2.12** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 3,$$

og en linje  $l$  er givet ved ligningen

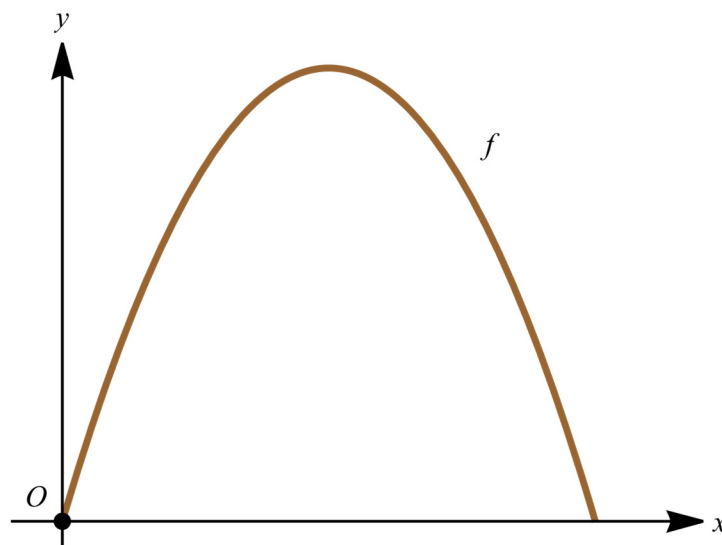
$$y = 2x - 4.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og linjen  $l$ .

Punktet  $P(1,3)$  ligger på grafen for  $f$ .

- b) Bestem afstanden fra punktet  $P$  til linjen  $l$  ved brug af en formel.

**6.D2.13**



I vinkælderen Celler Cooperatiu de Pinell de Brai fra 1918 er nogle af kælders hvælvinger parabelformede.

I en model kan en bestemt af kælders parabelformede hvælvinger beskrives som en del af grafen for funktionen

$$f(x) = -1,6x^2 + 3,4x,$$

hvor  $f(x)$  er højden over gulvet af hvælvingen (målt i meter) i afstanden  $x$  (målt i meter) fra venstre hjørne  $O$  af hvælvingen. Se figuren.

- a) Bestem bredden af hvælvingen ved gulvhøjde.  
b) Bestem ved beregning hvælvingens maksimale højde.

**6.D2.14** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 1,$$

og en linje  $l$  er givet ved ligningen

$$y = 9x - 5.$$

Grafen for  $f$  har en tangent  $t$ , der er parallel med linjen  $l$ .

- a) Bestem koordinatsættet til røringspunktet for tangenten  $t$ .

**6.D2.15** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Grafen for  $f$  går gennem punkterne  $P(3,19)$ ,  $Q(5,12)$  og  $R(8,14)$ .

- a) Bestem tallene  $a$ ,  $b$  og  $c$  ved regression.

**6.D2.16** I en model kan udviklingen i antallet af en bestemt type fisk i en sø beskrives ved funktionen

$$f(x) = 500 - \frac{220}{1 + 850 \cdot e^{-2x}}, \quad x \geq 0,$$

hvor  $f(x)$  betegner antallet af fisk i søen, og  $x$  angiver antallet af år efter første optælling af fiskene i søen.

- a) Tegn grafen for  $f$ .  
b) Bestem, hvornår antallet af fisk ifølge modellen kommer ned på 300.

6.D2.17



Billedkilde: Marc Benedetti, Pixabay

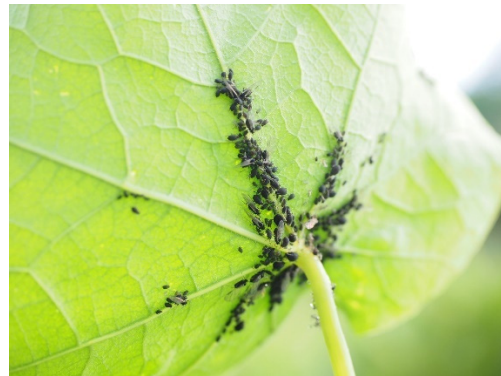
I en model kan vægten af en bestemt landskildpaddeart beskrives ved forskriften

$$f(x) = 4,81 \cdot x^{0,572}, \quad 0 \leq x \leq 25,$$

hvor  $f(x)$  angiver skildpaddens vægt (målt i kg)  $x$  år efter fødslen.

- Bestem skildpaddens vægt, når den er et år gammel.
- Løs ligningen  $f(x) = 20$ , og forklar, hvad løsningen fortæller om skildpaddens vægt.

6.D2.18



Billedkilde: pixabay

I en model kan udviklingen i antallet af bladlus på en busk beskrives ved funktionen

$$f(x) = \frac{500}{1 + 10 \cdot 0,763^x}, \quad 0 \leq x \leq 25,$$

hvor  $f(x)$  betegner antallet af bladlus på busken til tidspunktet  $x$  (målt i døgn).

- Tegn grafen for  $f$ .
- Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor der var 200 bladlus på busken.
- Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden i antallet af bladlus til tidspunktet  $x = 14$ .

**6.D2.19** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (x - 3) \cdot e^{-x}.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(5, f(5))$ .
- b) Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af differentialregning.

**6.D2.20** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - \frac{3}{x}, \quad x > 0.$$

- a) Tegn grafen for  $f$ .
- b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(1, f(1))$ .
- c) Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af  $f'(x)$ .

**6.D2.21** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}.$$

- a) Bestem funktionens nulpunkter.
- b) Bestem funktionens maksimum ved hjælp af differentialregning.

**6.D2.22** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x, \quad -2 \leq x \leq 5.$$

- a) Tegn grafen for  $f$ .
- b) Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af  $f'(x)$ .

**6.D2.23** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{64 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

- a) Tegn grafen for  $f$ .
- b) Bestem maksimum for  $f$ .

**6.D2.24** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x.$$

- Bestem nulpunkterne for  $f$ .
- Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

Linjen  $l$  med ligningen  $y = -x + 9$  er tangent til grafen for  $f$  i punktet  $P(3, f(3))$ .

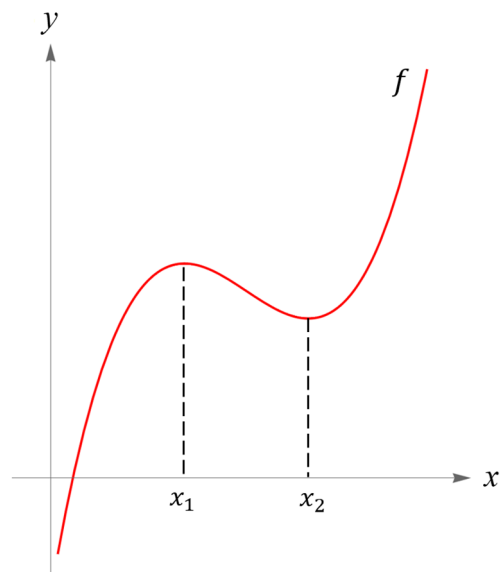
En anden linje  $m$  er parallel med linjen  $l$  og rører grafen for  $f$  i punktet  $Q$ .

- Bestem  $x$ -koordinaten til punktet  $Q$ .

**6.D2.25** Figuren viser grafen for funktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = \frac{1}{20}x^3 - x^2 + 6x - 4.$$

- Bestem  $f'(x)$ .
- Bestem ekstremumsstederne  $x_1$  og  $x_2$  for  $f$ .



**6.D2.26** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^x - 2x + 3.$$

- Bestem  $f'(x)$ .
- Gør ved hjælp af differentialregning rede for, at funktionen  $f$  har et minimum.

**6.D2.27** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 3.$$

Man kan ved hjælp af Newtons metode bestemme en tilnærmet værdi for nulpunktet for  $f$ .

Lad  $x_1 = 3$  være startgættet i Newtons metode.

- Bestem ved beregning  $x_2$ .

**6.D2.28** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 20x - 40.$$

Man kan ved hjælp af Newtons metode bestemme en tilnærmet værdi for nulpunktet for  $f$ .

Lad  $x_1 = 3$  være startgættet i Newtons metode.

- a) Bestem ved beregning  $x_2$  og  $x_3$ .

**6.D2.29**



Billedkilde: pexels

I en model kan en persons hjerterytme beskrives ved en harmonisk svingning  $f$  givet ved

$$f(x) = 20 \cdot \sin\left(2\pi \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + 100, \quad 0 \leq x \leq 10,$$

hvor  $f(x)$  angiver trykket i en pulsåre (målt i mmHg) til tidspunktet  $x$  (målt i sekunder efter den første måling).

- a) Tegn grafen for  $f$ .  
b) Bestem det tidspunkt, hvor trykket i pulsåren når sit maksimum første gang efter den første måling.

**6.D2.30** I en model kan temperaturen i et rum beskrives ved en harmonisk svingning  $f$  givet ved

$$f(x) = 4 \cdot \sin(0,26 \cdot x - 2,36) + 21, \quad 0 \leq x \leq 24,$$

hvor  $f(x)$  angiver rummets temperatur (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ) til tidspunktet  $x$  (målt i antal timer efter midnat).

- a) Bestem temperaturen i rummet kl. 9.00.  
b) Bestem den hastighed, hvormed temperaturen ændrer sig kl. 9.00.



6.D2.31



Billedkilde: pexels

Vandstanden ved Mandø i Vadehavet varierer med tidevandet.

I en model kan vandstanden for et bestemt døgn beskrives ved en harmonisk svingning  $f$  givet ved

$$f(x) = 0,95 \cdot \sin(0,51 \cdot x) + 2,75, \quad 0 \leq x \leq 24,$$

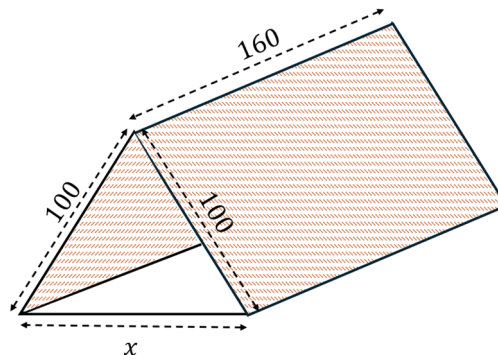
hvor  $f(x)$  angiver vandstanden (målt i meter) til tidspunktet  $x$  (målt i timer efter midnat).

- a) Bestem vandstanden til tidspunktet  $x = 12$ .

Man kan via en dæmning køre til Mandø, når vandstanden er under 2 meter.

- b) Bestem de to tidsintervaller, hvor det i det pågældende døgn er muligt at køre til Mandø.

6.D2.32



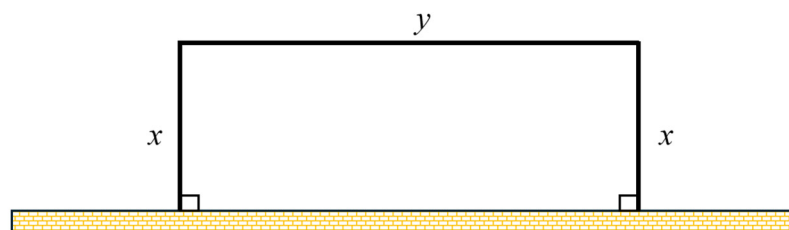
Figuren viser en model af et shelter. Modellen består af to ens, skråstillede rektangulære flader. Nogle af målene fremgår af figuren.

Rumfanget  $V(x)$  af et sådant shelter kan beskrives ved

$$V(x) = 40 \cdot x \cdot \sqrt{40000 - x^2}, \quad 50 < x < 150.$$

- a) Brug differentialregning til at bestemme  $x$ , så rumfanget af shelteret bliver størst muligt.

## 6.D2.33



En rektangulær hestefold skal anlægges op ad en mur og indhegnes. Der skal ikke være noget hegn op ad muren.

På figuren ses en model af hestefolden, hvor sidelængderne er  $x$  og  $y$ .

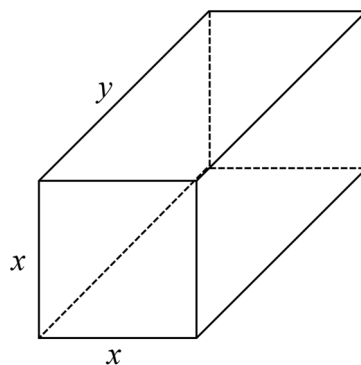
Den samlede længde af hegnet er 200 m.

- a) Vis, at arealet  $A(x)$  af hestefolden er givet ved

$$A(x) = x \cdot (200 - 2x).$$

- b) Brug differentialregning til at bestemme  $x$ , så arealet af hestefolden bliver størst muligt.

## 6.D2.34



En kasseformet klods har kvadratiske endeflader med sidelængde  $x$ . Længden af klodsens er  $y$ , og klodsens har rumfanget  $200 \text{ cm}^3$ .

- a) Vis, at overfladearealet  $A(x)$  af klodsens kan bestemmes ved

$$A(x) = 2x^2 + \frac{800}{x}.$$

- b) Brug differentialregning til at bestemme  $x$ , så overfladearealet af klodsens bliver mindst muligt.

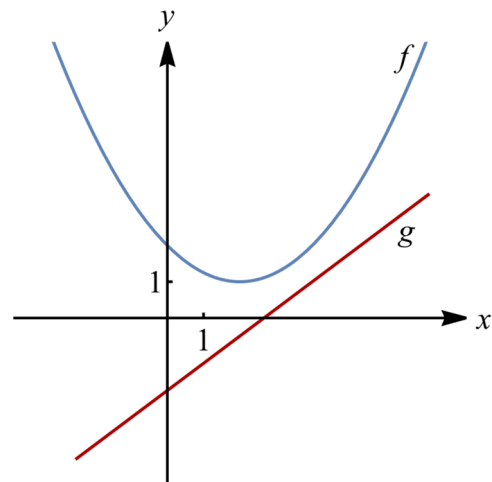
**6.D2.35** Figuren viser graferne for to funktioner  $f$  og  $g$ , der er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

Funktionen  $L(x) = f(x) - g(x)$  angiver den lodrette afstand mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

- a) Benyt  $L(x)$  til at bestemme den mindste lodrette afstand mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .



**6.D2.36** Inger skal anlægge et blomsterbed i sin have.

Bedet skal have form som et rektangel med en halvcirkel for enden.

På figuren ses en model af blomsterbedet, hvor halvcirkelens radius er  $r$ , og rektanglets sidelængder er  $h$  og  $2r$ .

Bedets areal skal være  $50 \text{ m}^2$ .

Sammenhængen mellem  $h$  og  $r$  er

$$2r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 50.$$

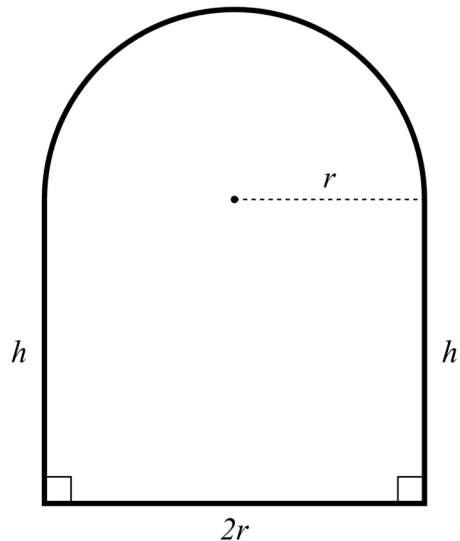
Inger overvejer at anlægge bedet, så  $r$  er 4 meter.

- a) Bestem værdien af  $h$ , hvis  $r = 4$ .

Inger beslutter sig i stedet for at vælge  $r$ , så bedets omkreds bliver mindst mulig.

- b) Opstil et udtryk for bedets omkreds  $O(r)$ .

Bestem den værdi af  $r$ , hvor bedets omkreds bliver mindst mulig.



**6.D2.37**

En fabrik ønsker at fremstille en beholder til opsamling af regnvand.

Beholderen skal være cylinderformet med radius  $r$  og højde  $h$ . Se figuren.

Beholderens rumfang  $V$  skal være  $0,5 \text{ m}^3$ , og den skal ikke have noget låg.

Fabrikken overvejer at fremstille beholderen med en radius på  $0,2 \text{ m}$ .

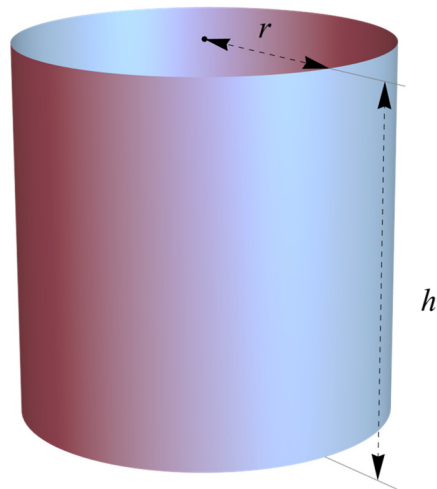
- a) Bestem beholderens højde  $h$ , hvis  $V = 0,5$ , og  $r = 0,2$ .

Fabrikken beslutter sig i stedet for at vælge radius, så det samlede overfladeareal af beholderen bliver mindst muligt.

Rumfanget af beholderen skal stadig være  $0,5 \text{ m}^3$ .

- b) Opstil et udtryk for det samlede overfladeareal  $O(r)$ .

Bestem den værdi af  $r$ , hvor overfladearealet af beholderen bliver mindst muligt.



**6.D2.38**

En landmand dyrker korn på to marker.

Sammenhængen mellem mængden af gødning  $x$  (målt i tons) og høstudbyttet  $f(x)$  (målt i tons) kan på mark 1 beskrives ved funktionen

$$f(x) = 71 - 60 \cdot e^{-0,3x^2}.$$

Sammenhængen mellem mængden af gødning  $x$  (målt i tons) og høstudbyttet  $g(x)$  (målt i tons) kan på mark 2 beskrives ved funktionen

$$g(x) = 73 - 60 \cdot e^{-4,5x^2}.$$

Landmanden bruger i alt  $2$  tons gødning.

- a) Bestem det samlede høstudbytte fra de to marker, hvis der bruges  $1,5$  tons gødning på mark 1 og resten på mark 2.
- b) Opstil et udtryk for det samlede høstudbytte  $h(x)$  fra de to marker ved brug af  $x$  kg gødning på mark 1 og resten på mark 2.  
Bestem  $x$ , så det samlede høstudbytte bliver størst muligt.

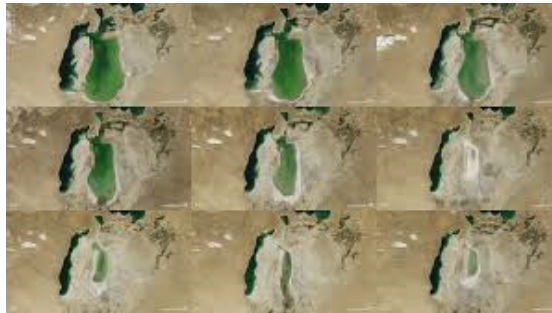
**6.D2.39** I en model kan det samlede antal dødsfald i en bestemt epidemi beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{683}{1 + 81,3 \cdot e^{-0,16x}},$$

hvor  $f(x)$  angiver det samlede antal dødsfald  $x$  dage, efter epidemien blev opdaget.

- Bestem det samlede antal dødsfald 10 dage, efter epidemien blev opdaget.
- Hvor mange dage efter epidemien blev opdaget, voksede det samlede antal dødsfald hurtigst?

**6.D2.40**



Billedkilde: NASA

I en model for udtørringen af en bestemt sø kan den gennemsnitlige vanddybde i søen beskrives ved funktionen

$$f(x) = 0,083 \cdot (100 - x^2)^{1,5}, \quad 0 \leq x \leq 10,$$

hvor  $f(x)$  betegner den gennemsnitlige vanddybde (målt i cm) til tiden  $x$  (målt i uger, efter at udtørringen begynder).

- Bestem den gennemsnitlige vanddybde i søen 5 uger, efter at udtørringen er begyndt.
- Bestem det tidspunkt, efter at udtørringen er begyndt, hvor den gennemsnitlige vanddybde aftager hurtigst.

**6.D2.41** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 7.$$

- Benyt  $f'(x)$  til at bestemme monotoniforholdene for  $f$ .
- Bestem de værdier af tallet  $k$ , hvor grafen for  $f$  og linjen med ligningen  $y = k$  har netop to punkter fælles.

**6.D2.42** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 5\sqrt{x} \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

- a) Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af differentialregning.

En anden funktion  $g$  er givet ved

$$g(x) = 5\sqrt{x} \cdot e^{-a \cdot x}, \quad x \geq 0,$$

hvor  $0 < a < 1$ .

- b) Bestem tallet  $a$ , så  $g$  har maksimum, når  $x = 3$ .

## 7. Integralregning

### Delprøve 1

**7.D1.1**

a) Bestem

$$\int (4e^x + 6x^5) dx .$$

**7.D1.2**

a) Bestem

$$\int (3x^5 + 6e^{2x} + 1) dx .$$

**7.D1.3**

a) Bestem

$$\int \left( \frac{2}{x} + 4x - 5 \right) dx .$$

**7.D1.4**

a) Bestem

$$\int (3x^2 + x - 4) dx .$$

**7.D1.5**

a) Bestem

$$\int (2\sin(x) + 3\ln(x)) dx .$$

**7.D1.6**

a) Bestem

$$\int \left( \frac{1}{2} \cos(x) + 6\sqrt{x} - 2^x \right) dx .$$

**7.D1.7**

a) Bestem

$$\int \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 dx .$$

**7.D1.8**

a) Bestem

$$\int 12x^2 \cdot (x^3 + 7)^3 dx .$$

7.D1.9

a) Bestem

$$\int_1^3 (6x^2 + 2x) dx .$$

7.D1.10

a) Bestem

$$\int_0^2 8 \cdot \left( \frac{1}{2}x - 1 \right)^3 dx .$$

7.D1.11

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 6x^2 - 8x + \frac{1}{x}, \quad x > 0 .$$

a) Bestem en stamfunktion til  $f$ .

7.D1.12

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 6x + 2 .$$

a) Gør rede for, at funktionen  $F(x) = 3x^2 + 2x + 5$  er en stamfunktion til  $f$ .

7.D1.13

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 4 .$$

a) Bestem den stamfunktion til  $f$ , hvis graf går gennem punktet  $P(1, 5)$ .

7.D1.14

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 6x + 8 ,$$

og en linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l: y = -4x - 5 .$$

a) Bestem den stamfunktion til  $f$ , hvis graf har  $l$  som tangent.



## 7.D1.15

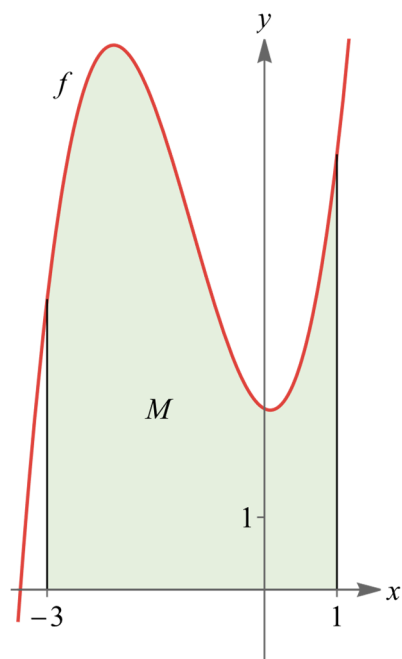
Figuren viser grafen for en funktion  $f$  og et område  $M$ .

Funktionen  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

Nedenstående tabel viser nogle værdier af funktionerne  $f$  og  $F$ .

|        |     |   |
|--------|-----|---|
| $x$    | -3  | 1 |
| $f(x)$ | 4   | 6 |
| $F(x)$ | -15 | 5 |

a) Bestem arealet af  $M$ .



## 7.D1.16

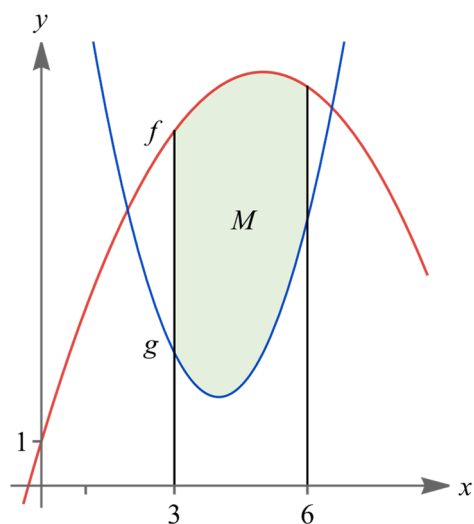
Graferne for to funktioner  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med de lodrette linjer  $x = 3$  og  $x = 6$  et område  $M$ . Se figuren.

Funktionen  $F$  er en stamfunktion til  $f$ , og funktionen  $G$  er en stamfunktion til  $g$ .

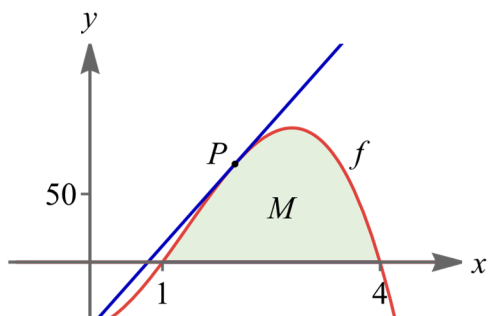
Nedenstående tabel viser nogle værdier af funktionerne  $f$ ,  $g$ ,  $F$  og  $G$ .

|        |    |    |
|--------|----|----|
| $x$    | 3  | 6  |
| $f(x)$ | 8  | 9  |
| $g(x)$ | 3  | 6  |
| $F(x)$ | 15 | 42 |
| $G(x)$ | 27 | 36 |

a) Bestem arealet af  $M$ .



## 7.D1.17



På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

Nedenstående tabel viser nogle værdier af funktionerne  $f$ ,  $f'$  og  $F$ , hvor  $f'$  er den afledte funktion af  $f$ , og  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

| $x$     | 1  | 2  | 3   | 4    |
|---------|----|----|-----|------|
| $f(x)$  | 0  | 72 | 96  | 0    |
| $f'(x)$ | 72 | 60 | -24 | -180 |
| $F(x)$  | 20 | 57 | 148 | 209  |

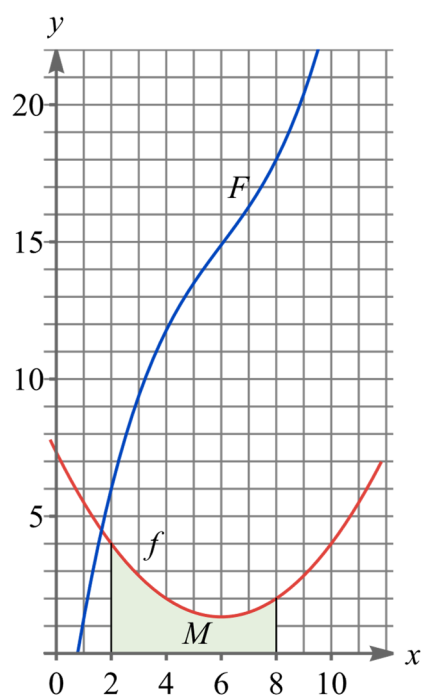
- Bestem arealet af det område  $M$ , der i første kvadrant afgrænses af grafen for  $f$  og  $x$ -aksen. Se figuren.
- Bestem en ligning for den linje  $l$ , der er tangent til grafen for  $f$  i punktet  $P(2, f(2))$ . Se figuren.

## 7.D1.18

På figuren ses grafen for en funktion  $f$  og grafen for en stamfunktion  $F$  til  $f$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen og de to lodrette linjer  $x = 2$  og  $x = 8$  et område  $M$ . Se figuren.

- Bestem arealet af  $M$ .



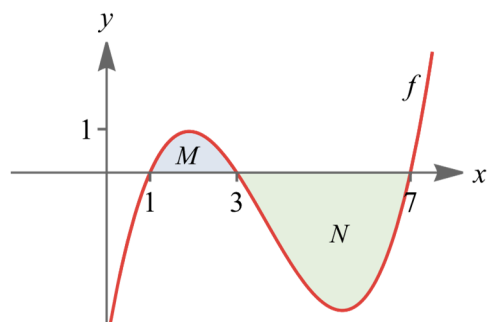
7.D1.19

På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen to områder  $M$  og  $N$ .

Arealet af  $M$  er  $\frac{5}{4}$ , og arealet af  $N$  er 8.

a) Bestem  $\int_1^7 f(x) dx$ .

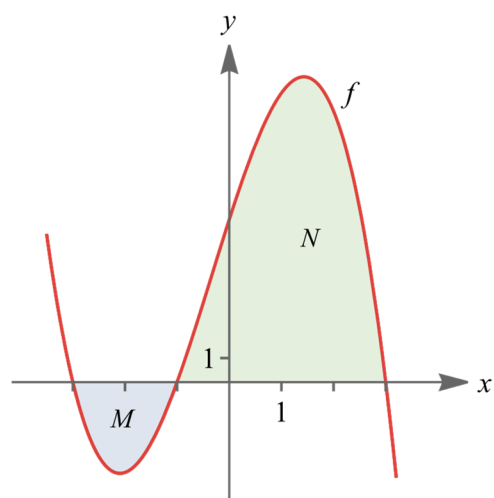


7.D1.20

Grafen for en funktion  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen to områder  $M$  og  $N$ .  
Se figuren.

Det oplyses, at arealet af  $M$  er 5,  
og at  $\int_{-3}^3 f(x) dx = 27$ .

a) Bestem arealet af  $N$ .



7.D1.21

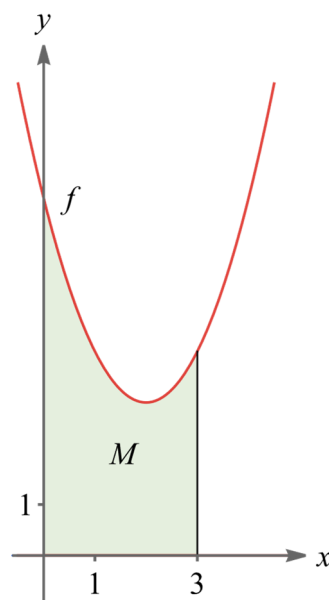
En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

a) Bestem  $\int f(x) dx$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og den lodrette linje  $x=3$  et område  $M$ . Se figuren.

b) Bestem arealet af  $M$ .



## 7.D1.22

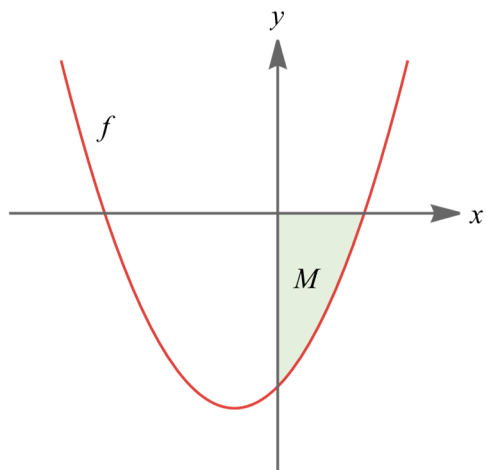
En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

- a) Bestem nulpunkterne for  $f$ .

I fjerde kvadrant afgrænser grafen for  $f$  sammen med koordinatsystemets akser et område  $M$ . Se figuren.

- b) Bestem arealet af  $M$ .



## 7.D1.23

To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

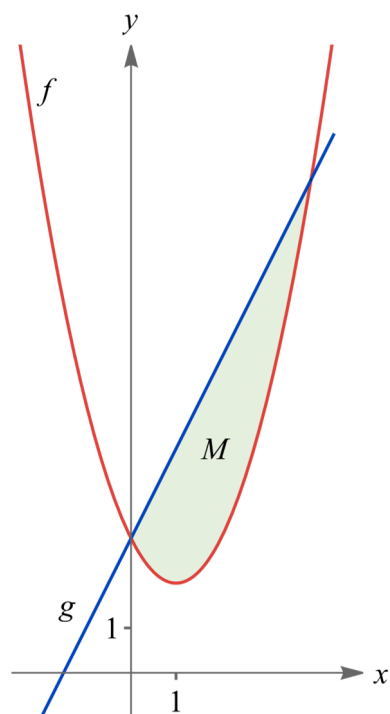
$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = 2x + 3$$

- a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser et område  $M$ . Se figuren.

- b) Bestem arealet af  $M$ .



7.D1.24

To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

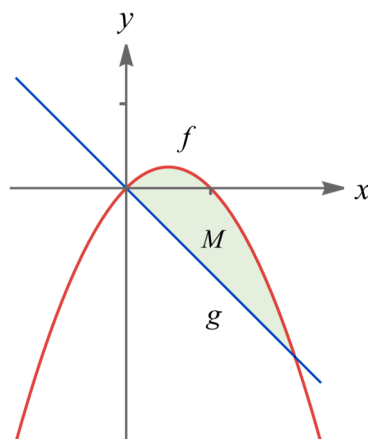
$$f(x) = -x^2 + x$$

$$g(x) = -x$$

- a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser et område  $M$ . Se figuren.

- b) Bestem arealet af  $M$ .



7.D1.25

To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

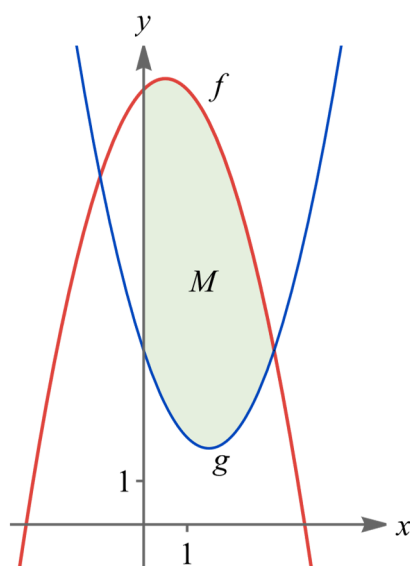
$$f(x) = -x^2 + x + 10$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 4$$

- a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med  $y$ -aksen i første kvadrant et område  $M$ . Se figuren.

- b) Bestem arealet af  $M$ .



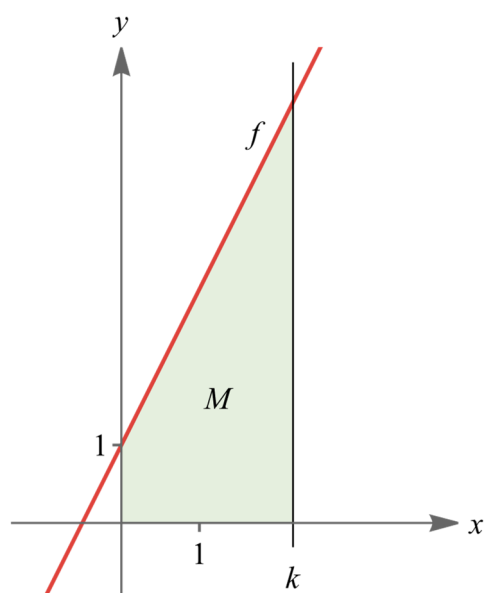
7.D1.26

En funktion  $f$  er givet ved

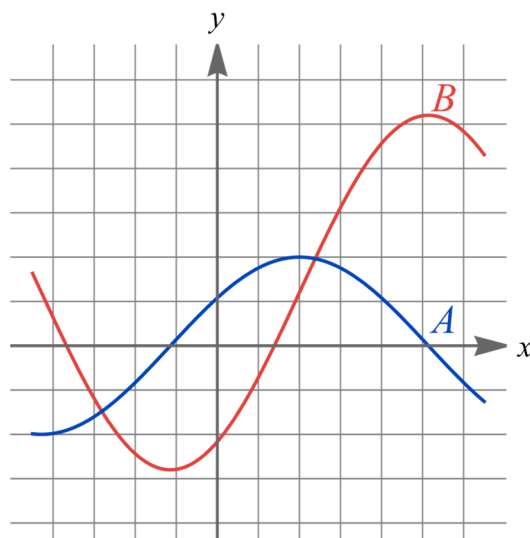
$$f(x) = 2x + 1$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og linjen med ligningen  $x = k$ , hvor  $k > 0$ , et område  $M$ . Se figuren.

- a) Bestem ved hjælp af integralregning tallet  $k$ , så arealet af  $M$  er 30.



7.D1.27



Figuren viser graferne for en funktion  $f$  og en stamfunktion  $F$  til  $f$ .

- a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion. Brug bilaget.

7.D1.28

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = -x^2 + 6x + c, \quad \text{hvor } c \text{ er et positivt tal.}$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen og de to lodrette linjer med ligningerne  $x=1$  og  $x=4$  et område  $M$ .

- a) Bestem  $c$ , så arealet af  $M$  er lig med 27.

7.D1.29

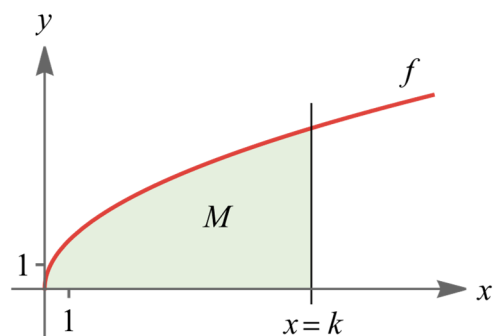
En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}.$$

I første kvadrant afgrænser grafen for  $f$  sammen med  $x$ -aksen og linjen med ligningen  $x=k$ ,  $k > 0$ , et område  $M$ . Se figuren.

Lad  $V$  være rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

- a) Bestem den værdi af  $k$ , hvor  $V = 50\pi$ .



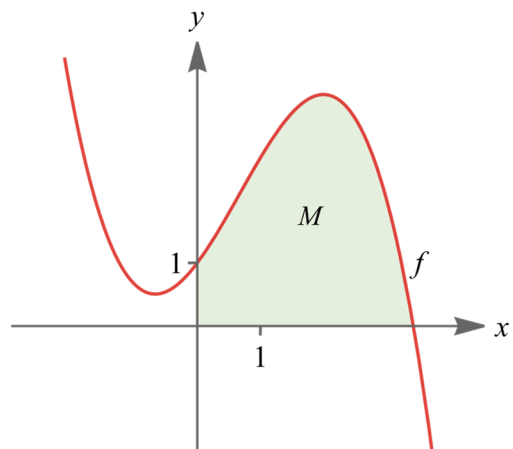
## Delpøve 2

**7.D2.1** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinataksene et område  $M$ .  
Se figuren.

- a) Bestem arealet af området  $M$ .



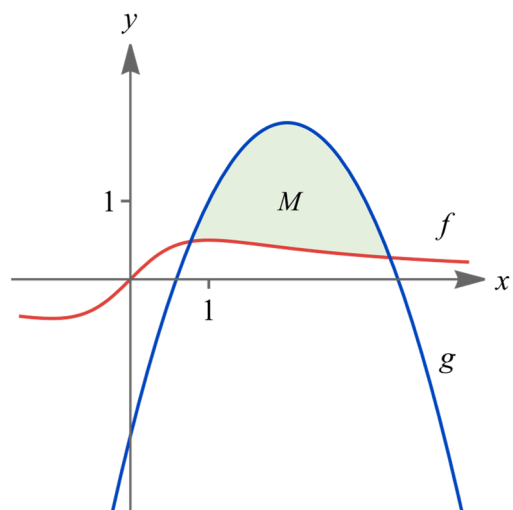
**7.D2.2** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = -x^2 + 4x - 2$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser et område  $M$ . Se figuren.

- a) Bestem arealet af området  $M$ .



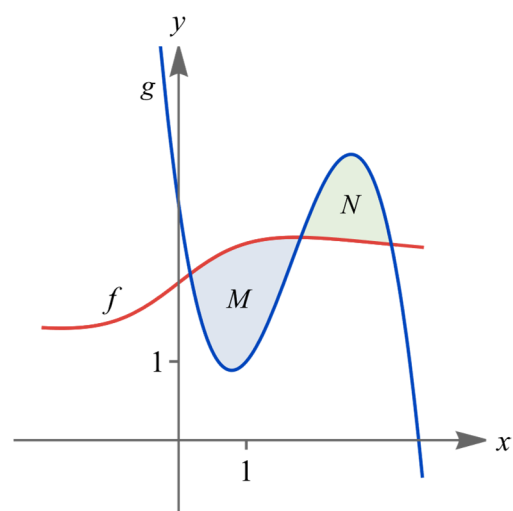
**7.D2.3** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} + 2$$

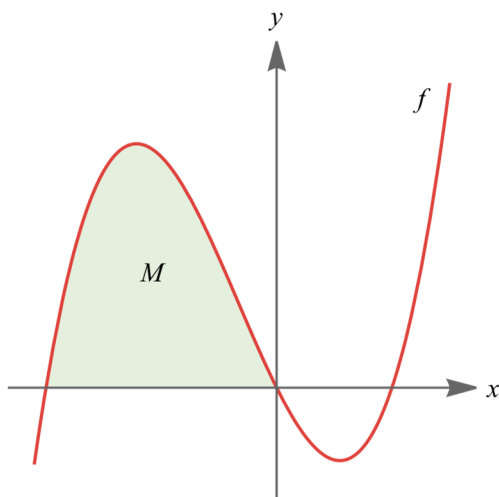
$$g(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x + 3$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser to områder  $M$  og  $N$ . Se figuren.

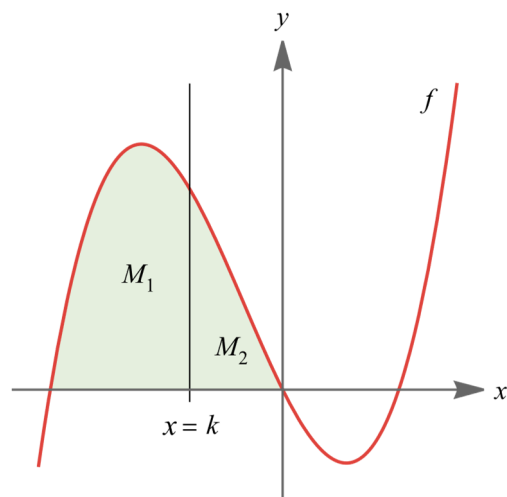
- a) Bestem  $x$ -koordinaterne til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.  
b) Bestem det samlede areal af områderne  $M$  og  $N$ .



## 7.D2.4



Figur 1



Figur 2

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

a) Bestem nulpunkterne for  $f$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen et område  $M$  i anden kvadrant. Se figur 1.

Området  $M$  deles i to områder  $M_1$  og  $M_2$  af linjen med ligningen  $x = k$ , hvor  $-4 < k < 0$ . Se figur 2.

a) Bestem tallet  $k$ , så arealet af  $M_1$  er dobbelt så stort som arealet af  $M_2$ .

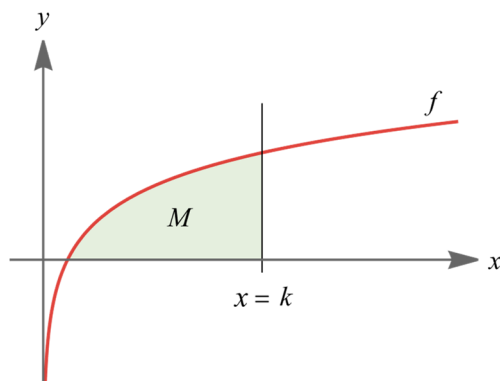
## 7.D2.5

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 2 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

I første kvadrant afgrænser grafen for  $f$  sammen med  $x$ -aksen og linjen med ligningen  $x = k$ , hvor  $k > 1$ , et område  $M$ . Se figuren.

a) Bestem den værdi af  $k$ , hvor arealet af området  $M$  er lig 25.



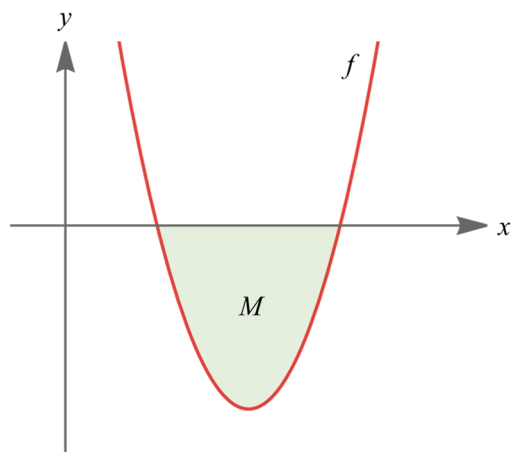


**7.D2.6** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^2 - 8x + c, \quad c < 16.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen et område  $M$ . Se figuren.

- a) Bestem den værdi af tallet  $c$ , hvor arealet af området  $M$  er lig 9.



**7.D2.7** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = -2x^2 + 6x + 4$$

$$g(x) = a \cdot x \cdot (x - 3) + 4, \quad a > -2$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser et område  $M$ .

- a) Bestem den værdi af tallet  $a$ , hvor arealet af  $M$  er lig med 5.

**7.D2.8** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

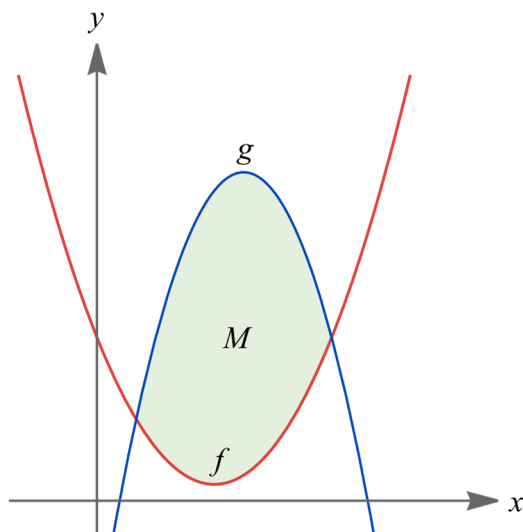
$$f(x) = -4x^2 + 40x - 64.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen et område  $M$ .

Lad  $V$  være rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

- a) Bestem  $V$ .

## 7.D2.9



To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

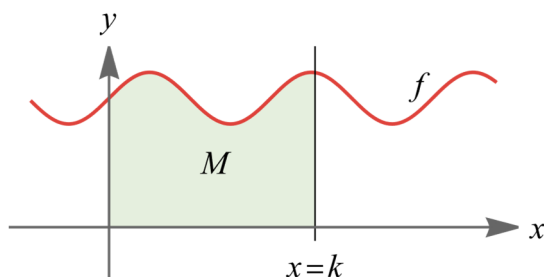
$$g(x) = -2x^2 + 15x - 8$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser et område  $M$ . Se figuren.

Lad  $V$  være rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

a) Bestem  $V$ .

## 7.D2.10



En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = \sin(x) + 5.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og linjen med ligningen  $x = k$ , hvor  $k > 0$ , et område  $M$ . Se figuren.

Lad  $V$  være rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

a) Bestem den værdi af  $k$ , hvor  $V = 500$ .

**7.D2.11** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

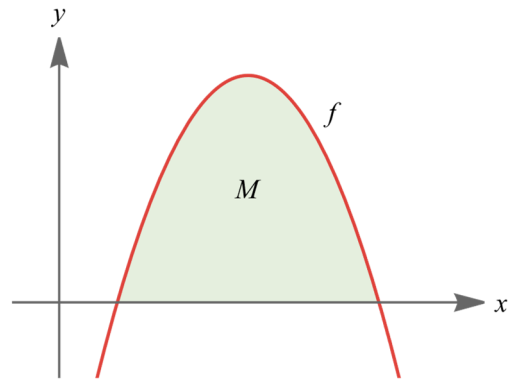
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + c,$$

hvor  $c > -\frac{25}{2}$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen et område  $M$ . Se figuren.

Lad  $V$  være rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

- a) Bestem den værdi af  $c$ , hvor  $V = 1000$ .



**7.D2.12** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

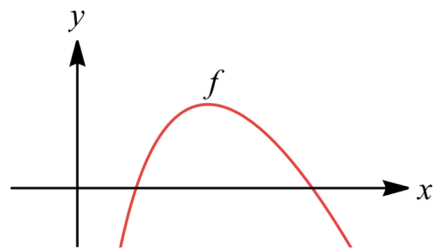
$$f(x) = \ln(x) \cdot (4 - x), \quad x > 0.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og  $x$ -aksen.

Længden  $L$  af grafen for  $f$  i et interval  $[a; b]$  kan bestemmes ved formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- b) Bestem længden af grafen for  $f$  mellem de to skæringspunkter med  $x$ -aksen.



**7.D2.13** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved forskrifterne

$$f(x) = 34 + \sqrt{-x^2 + 20x - 64}$$

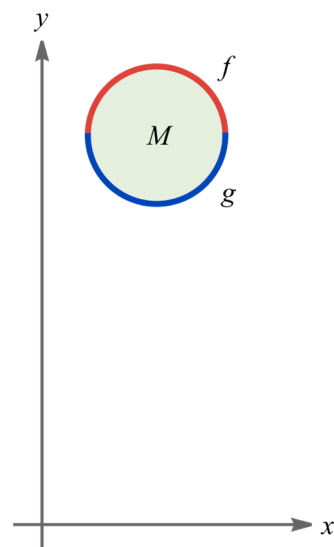
$$g(x) = 34 - \sqrt{-x^2 + 20x - 64}$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.

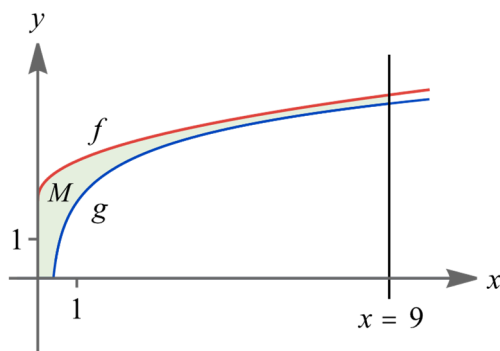
Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser i første kvadrant et område  $M$ . Se figuren.

I en model har en bestemt fitness-ring form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen. Enheden på begge akser er cm.

- b) Bestem rumfanget af fitness-ringen.



## 7.D2.14



Figur 1



Figur 2

To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved forskrifterne

$$f(x) = x^{0,45} + 2$$

$$g(x) = \ln(10x - 3)$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med koordinataksene og linjen med ligningen  $x = 9$  et område  $M$ . Se figur 1.

På figur 2 ses et glas. I en model har glasset form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når området  $M$  drejes  $360^\circ$  om  $x$ -aksen. Enheden på akserne er cm.

- Bestem  $f(9) - g(9)$ , og forklar, hvad dette tal fortæller om glasset.
- Bestem rumfanget af det materiale, som glasset er lavet af.
- Undersøg, om glasset kan indeholde  $200 \text{ cm}^3$  vand.

7.D2.15



Billedkilde: pexels

I en model kan strømstyrken i et elektrisk kredsløb beskrives ved en funktion  $f$  givet ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin(100\pi \cdot x) + 3, \quad 0 \leq x \leq 0,05,$$

hvor  $f(x)$  angiver strømstyrken (målt i ampère) til tidspunktet  $x$  (målt i sekunder efter den første måling).

a) Tegn grafen for  $f$ .

Den gennemsnitlige strømstyrke i kredsløbet i tidsrummet  $a \leq x \leq b$  kan beregnes ved formlen

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

b) Bestem den gennemsnitlige strømstyrke i kredsløbet i tidsrummet  $0 \leq x \leq 0,05$ .

7.D2.16



Billedkilde: W. Schneider

I efteråret 1918 blev Genève hårdt ramt af influenzaepidemien ”Den Spanske Syge”.

I en model kan den hastighed, som antallet af nye hospitalsindlagte steg med, beskrives ved

$$f(x) = \frac{420}{0,0069 \cdot x^2 - 0,64 \cdot x + 15,8}, \quad 0 \leq x \leq 70,$$

hvor  $f(x)$  er hastigheden (målt i antal nye indlagte pr. døgn), og  $x$  er antal døgn efter epidemiens start.

a) Med hvilken hastighed steg antallet af hospitalsindlagte 5 døgn efter epidemiens start?

b) Bestem  $\int_0^{20} f(x)dx$ , og forklar betydningen af dette tal.

## 8. Differentialligninger

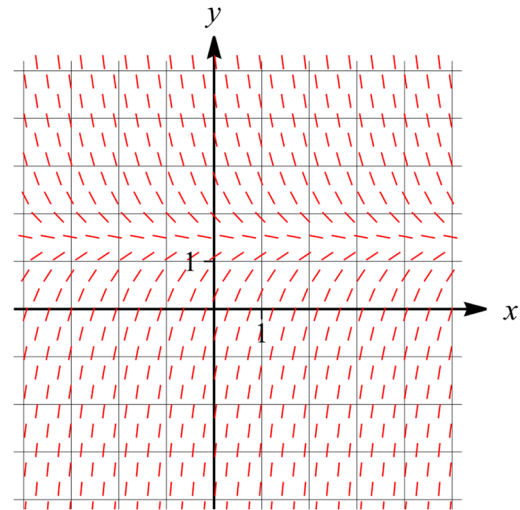
## Delprøve 1

**8.D1.1**

Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

Det oplyses, at funktionen  $f$  er en løsning til differentialligningen, samt at  $f(1) = 3$ .

- a) Tegn en skitse af grafen for  $f$ .  
Brug bilaget.

**8.D1.2**

En funktion  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^4 + 19}}{y^2 + 1}.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(3, 2)$ .

- a) Bestem linjeelementet i punktet  $P$ .

**8.D1.3**

En funktion  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x} - 4x + 2.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(3, 6)$ .

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i  $P$ .

**8.D1.4**

En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 4x - 3y.$$

Tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(1, f(1))$  har hældningskoefficienten 10.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(1, f(1))$ .

**8.D1.5** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 7y - y^2.$$

- Bestem tangenthældningen i de punkter på grafen for  $f$ , hvor  $y$ -koordinaten er lig 2.
- Bestem  $y$ -koordinaterne til de to punkter på grafen for  $f$ , hvor tangenthældningen er lig 10.

**8.D1.6** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = -2 \cdot y.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0,3)$ .

- Bestem linjeelementet i  $P$ , og gør rede for, hvad dette fortæller om grafens forløb.
- Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D1.7** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 16 - 2 \cdot y.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(1,3)$ .

- Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P$ .
- Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D1.8** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = -10 - \frac{1}{2} \cdot y.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0,20)$ .

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i  $P$ .
- Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D1.9** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,02 \cdot y \cdot (10 - y).$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0,5)$ .

- Bestem linjeelementet i  $P$ .
- Bestem en forskrift for  $f$ .



**8.D1.10** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (6 - y),$$

hvor  $a$  er en konstant.

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0, 2)$  med tilhørende linjeelement  $(0, 2, 4)$ .

- Bestem  $a$ .
- Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D1.11** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2.$$

- Undersøg, om  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5.$$

**8.D1.12** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x.$$

- Gør rede for, at  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - y + 6.$$

**8.D1.13** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2.$$

- Undersøg, om  $f$  er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 6}{x}.$$

**8.D1.14** En differentialligning er givet ved

$$y' = \frac{y}{x} + 2x^2 + 1.$$

- Gør rede for, at  $f(x) = x \cdot \ln(x) + x^3$  er en løsning til differentialligningen.

**8.D1.15** En differentialligning er givet ved

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x.$$

- a) Undersøg, om funktionen  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$  er en løsning til differentialligningen.

**8.D1.16** I en model kan strømstyrken  $I(t)$  i et bestemt kredsløb beskrives ved differentialligningen

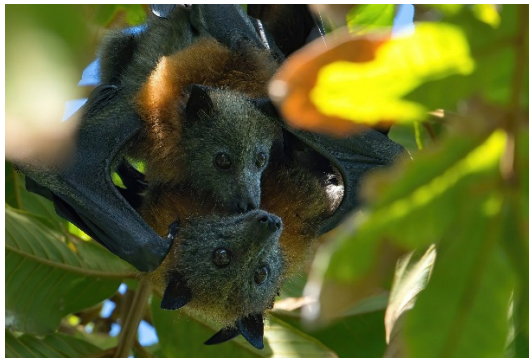
$$I'(t) = 6 - 2 \cdot I(t),$$

hvor  $I(t)$  er strømstyrken (målt i ampere) til tidspunktet  $t$  (målt i sekunder).

Det oplyses, at  $I(0) = 0$ .

- a) Bestem strømstyrkens væksthastighed, når strømstyrken er 1,3 ampere.  
b) Bestem en forskrift for  $I(t)$ .

**8.D1.17**



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan udviklingen i antallet af flagermus i en bestemt koloni af flagermus beskrives ved en funktion  $y$  af tiden  $x$  (målt i år efter 1995).

Den hastighed, hvormed antallet af flagermus i kolonien vokser, er til ethvert tidspunkt proportionalt med produktet af antallet af flagermus og forskellen mellem 600 og antallet af flagermus.

Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 0,0011.

- a) Opskriv en differentialligning, som  $y$  må opfylde.

**8.D1.18**

I en model for tømning af vand fra et bassin kan væskehøjden i bassinet (målt i cm) beskrives ved en funktion  $h$  af tiden  $t$  (målt i sekunder, efter at tømningen af bassinet er begyndt).

Den hastighed, hvormed væskehøjden ændrer sig, er til ethvert tidspunkt proportional med kvadratroden af væskehøjden.

Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 0,0031.

- a) Opskriv en differentialligning, som  $h$  må opfylde.

## Delprøve 2

**8.D2.1** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 4x^3 \cdot e^{-x}.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0,1)$ .

- a) Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D2.2** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = y + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x^3,$$

hvor  $f(1) = 2$ .

- a) Bestem en forskrift for  $f$ .  
b) Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

**8.D2.3** En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} + x = y + x^3.$$

- a) Bestem en forskrift for den løsning  $f$  til differentialligningen, hvis graf går gennem punktet  $P(2,3)$ .  
b) Bestem minimum for  $f$ .

**8.D2.4** I en model kan udviklingen i antallet af individer fra en bestemt årgang af en population beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = -0,00081 \cdot e^{0,084 \cdot t} \cdot P,$$

hvor  $P(t)$  er antallet af individer fra årgangen  $t$  år efter den første optælling.

Efter 20 år er der 1120 individer fra årgangen tilbage i populationen.

- a) Bestem væksthastigheden for antallet af individer til dette tidspunkt.  
b) Bestem en forskrift for  $P$ .

## 8. Differentialligninger

**8.D2.5** I en model kan udviklingen i antallet af fugle i et bestemt område beskrives ved differentialligningen

$$N' = 0,03 \cdot N - 0,1 \cdot e^{0,05 \cdot t},$$

hvor  $N(t)$  er antallet af fugle i området (målt i tusinde)  $t$  år efter 1995.

Det oplyses, at der i 2010 var 7,3 tusinde fugle i området.

- Bestem en forskrift for  $N$ .
- Bestem det år, hvor der ifølge modellen er flest fugle i området.

**8.D2.6**



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan mængden af biomasse i et område efter en skovbrand beskrives ved differentialligningen

$$y' = 0,08 \cdot y \cdot \ln\left(\frac{350}{y}\right),$$

hvor  $y = f(t)$  er biomassen (målt i ton/hektar)  $t$  år efter skovbranden, hvor  $0 \leq t \leq 18$ .

Det oplyses, at  $f(0) = 5$ .

- Bestem væksthastigheden af biomassen til tidspunktet  $t = 0$ .
- Bestem biomassen, når væksthastigheden er 4 ton/hektar pr. år.
- Bestem en forskrift for  $f$ .

8.D2.7



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan udviklingen i vægten af en bestemt gravhund beskrives ved differentialligningen

$$y' = 0,0095 \cdot y \cdot (11 - y),$$

hvor  $y = f(x)$  er hundens vægt i kg  $x$  uger efter fødslen.

Hundens vægt 6 uger efter fødslen er 1,9 kg.

- Bestem en forskrift for  $f$ .
  - Hvor meget vejer hunden ifølge modellen, når dens vægt vokser hurtigst?
- Det oplyses, at hundens maksimale vægt er 11 kg.
- Hvor gammel er hunden, når den vejer 75 % af sin maksimale vægt?

8.D2.8



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan udviklingen i bestanden af hvidhvaler i et bestemt arktisk fjordområde beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 0,000057 \cdot y^2 - 0,04 \cdot y,$$

hvor  $y = f(x)$  er antallet af hvidhvaler i fjordområdet  $x$  år, efter registreringen af bestanden begyndte.

Da registreringen begyndte, var der 500 hvaler i fjordområdet.

- Med hvilken hastighed aftog antallet af hvidhvaler i fjordområdet, da registreringen begyndte?
- Bestem antallet af hvidhvaler i fjordområdet efter 10 år.

8.D2.9



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan udviklingen i antallet af bladlus på en bestemt rosenbusk beskrives ved differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (1200 - y),$$

hvor  $a$  er en konstant,  $y = f(x)$  er antallet af bladlus på rosenbusken, og  $x$  er antal døgn, efter at optællingen begyndte.

Efter 30 døgn er der 460 bladlus på rosenbusken

Efter 50 døgn er der 780 bladlus på rosenbusken.

- Bestem en forskrift for  $f$ .
- Bestem de to tidspunkter, hvor antallet af bladlus vokser med 15 bladlus pr. døgn.

8.D2.10

I en model for spredningen af et rygte blandt 600 elever på et gymnasium er antallet af elever, der har hørt rygtet, givet ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot (600 - y),$$

hvor  $y = f(t)$  er antallet af elever, der har hørt rygtet til tiden  $t$  (målt i minutter), efter at rygtet opstod, og  $k$  er en konstant.

Det oplyses, at  $f(0) = 3$  og  $f(60) = 400$ .

- Bestem en forskrift for  $f$ .
- Hvor mange minutter går der ifølge modellen, før 90 % af eleverne har hørt rygtet?

**8.D2.11** En kold vinternat går fyret i et hus ud.

I en model kan temperaturen inde i huset beskrives ved differentialligningen

$$y' = -0,225 - 0,075 \cdot y,$$

hvor  $y = f(x)$  betegner temperaturen inde i huset (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ), og  $x$  er tiden (målt i timer), efter fyret gik ud.

- a) Bestem væksthastigheden for temperaturen inde i huset, når temperaturen er  $15^{\circ}\text{C}$ .

Det oplyses, at til tidspunktet  $x = 0$  er væksthastigheden for temperaturen inde i huset  $-1,7^{\circ}\text{C}$  pr. time.

- b) Bestem en forskrift for  $f$ .

**8.D2.12** En lille metalkugle slippes fra overfladen af en høj beholder med olie og falder lodret ned gennem olien.

I en model kan den hastighed, hvormed kuglen bevæger sig ned gennem olien, beskrives ved differentialligningen

$$v'(t) = 9,8 - k \cdot v(t),$$

hvor  $v(t)$  er kuglens hastighed (målt i meter pr. sekund) til tiden  $t$  (målt i sekunder, efter kuglen blev sluppet), og  $k$  er en konstant, hvor  $k > 5$ .

Det oplyses, at  $v(0) = 0$  og  $v(0,2) = 0,3$ .

- a) Bestem en forskrift for  $v$ .

Kuglens lodrette afstand fra overfladen af olien er givet ved funktionen  $s$ , hvor  $s$  er en stamfunktion til  $v$ .

Der gælder, at  $s(0) = 0$ .

- b) Bestem kuglens lodrette afstand fra overfladen efter 1 sekund.



## 9. Kombinatorik og sandsynlighedsregning

### Delprøve 1

#### 9.D1.1



Billedkilde: Wikipedia

En neglesalon tilbyder 3 forskellige typer manicure, 2 forskellige typer neglelak og 5 forskellige typer negledekorationer.

- a) På hvor mange måder kan man vælge først 1 type manicure, så 1 type neglelak og til sidst 1 type dekoration?

#### 9.D1.2

I en virksomhed er der 10 personer ansat.  
Der skal dannes en arbejdsgruppe på 5 personer.

- a) På hvor mange måder kan arbejdsgruppen på 5 personer dannes ud af de 10 ansatte i virksomheden?

#### 9.D1.3

Jesper skal på ferie.  
Han har 9 forskellige trøjer.

- a) På hvor mange måder kan han vælge 4 trøjer at tage med på ferien?

#### 9.D1.4

På billedet ses to 6-sidede terninger.  
Den ene terning er rød, og den anden terning er hvid.

Hver terning kan vise udfaldene  
1, 2, 3, 4, 5 eller 6.

Sandsynligheden er den samme for hvert  
udfald på de to terninger.

De to terninger kastes.



- a) Bestem sandsynligheden for, at  
den røde terning viser en sekser, og  
at den hvide terning viser et lige tal.

9.D1.5



Billedet viser to forskellige bunker med fem kort i hver.  
Jesper trækker først et kort fra den venstre bunke og derefter et kort fra den højre.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at det første kort er spar es, og at det andet kort er mindre end 7?

9.D1.6

Nisa har to poser med farvede kugler.  
I den ene pose er der 10 kugler. 2 af kuglerne er røde, og 8 er blå.  
I den anden pose er der 5 kugler. 3 af kuglerne er gule, og 2 er grønne.  
Nisa trækker en tilfældig kugle fra hver af poserne.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at hun både trækker en rød kugle og en gul kugle?

9.D1.7

Et spil har 3 runder, hvor udfaldene i hver runde er enten blå, rød eller grøn.  
Sandsynlighederne for hvert af de enkelte udfald i en runde ses i nedenstående tabel.

| Udfald        | Blå | Rød | Grøn |
|---------------|-----|-----|------|
| Sandsynlighed | 0,2 | 0,1 | 0,7  |

Resultatet af et spil, hvor udfaldene er grøn, grøn og rød, benævnes  $(G, G, R)$ .

- a) Hvad er sandsynligheden for resultatet  $(G, G, R)$ ?

9.D1.8

På et gymnastikhold går der 4 drenge og 5 piger.  
Der trækkes lod om, hvilke 3 børn der skal med til et stævne.

- a) Bestem sandsynligheden for, at alle 3 børn er drenge.

**9.D1.9**

Et museum har købt 10 kunstværker af forskellige kunstnere.  
6 af kunstværkerne er malerier, og 4 er skulpturer.

Museet udvælger på en tilfældig måde 4 af kunstværkerne til en bestemt udstilling.

- a) Bestem sandsynligheden for, at alle 4 udvalgte kunstværker er malerier.

**9.D1.10**

Nedenfor ses sandsynlighedstabellen for en stokastisk variabel  $X$ .

|              |      |      |      |      |     |      |
|--------------|------|------|------|------|-----|------|
| $x_i$        | -3   | -1   | 0    | 3    | 4   | 10   |
| $P(X = x_i)$ | 0,10 | 0,15 | 0,25 | 0,10 | $p$ | 0,05 |

- a) Bestem  $p$ .  
b) Bestem  $P(X \leq 3)$ .

**9.D1.11**

Tabellen viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel  $X$ .

|              |     |     |      |      |     |
|--------------|-----|-----|------|------|-----|
| $x_i$        | 1   | 2   | 3    | 4    | 5   |
| $P(X = x_i)$ | 0,1 | 0,3 | 0,15 | 0,25 | 0,2 |

- a) Bestem middelværdien  $\mu$  af den stokastiske variabel  $X$ .

**9.D1.12**

En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med sandsynlighedsparameter  $p = 0,5$  og antalsparameter  $n = 40$ .

- a) Bestem middelværdien  $\mu$  af  $X$ .  
Bestem spredningen  $\sigma$  af  $X$ .

**9.D1.13**

En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 19$  og spredning  $\sigma = 2,5$ .

- a) Bestem  $P(14 \leq X \leq 24)$ .

**9.D1.14**

En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 24$  og spredning  $\sigma = 3$ .

- a) Bestem  $P(21 \leq X \leq 30)$ .

**9.D1.15**

En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 116$  og spredning  $\sigma = 18$ .

- a) Bestem

$$\int_{80}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 18} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-116}{18} \right)^2} dx.$$

**9.D1.16** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 60$  og spredning  $\sigma = 4$ .

- a) Opstil et integral til at bestemme sandsynligheden for, at  $X$  antager værdier mellem 55 og 65.

**9.D1.17** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 100$  og spredning  $\sigma = 16$ .

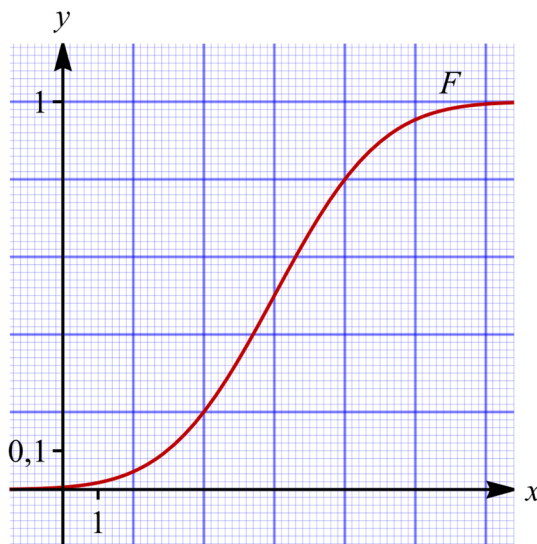
- a) Opstil et integral til at bestemme sandsynligheden  $P(X \geq 85)$ .

**9.D1.18** Lad  $f$  betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 13$ .

Det oplyses, at  $\int_9^{17} f(x) dx = 0,8$ .

- a) Gør rede for, at  $X$  ikke har spredningen 4.

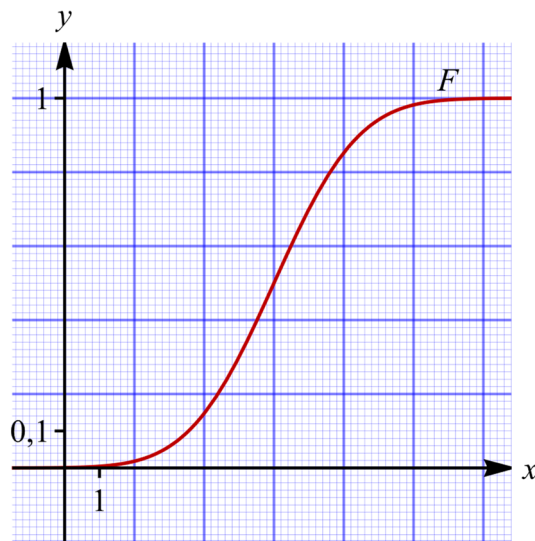
**9.D1.19**



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

- a) Bestem middelværdien for  $X$ .  
Brug bilaget.
- b) Bestem  $P(X \geq 8)$ .  
Brug bilaget.

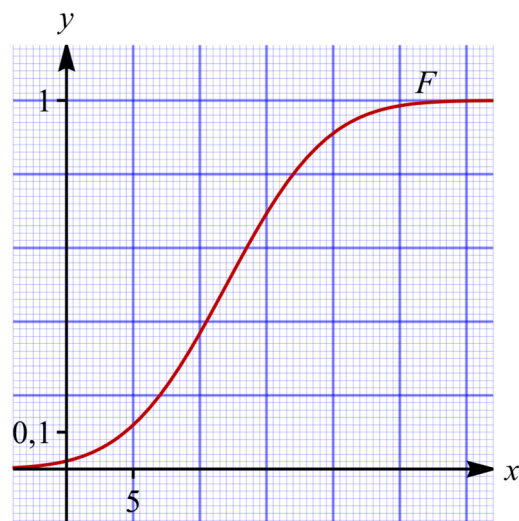
9.D1.20



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

- Bestem middelværdien for  $X$ .  
Brug bilaget.
- Bestem  $P(4 \leq X \leq 7)$ .  
Brug bilaget.

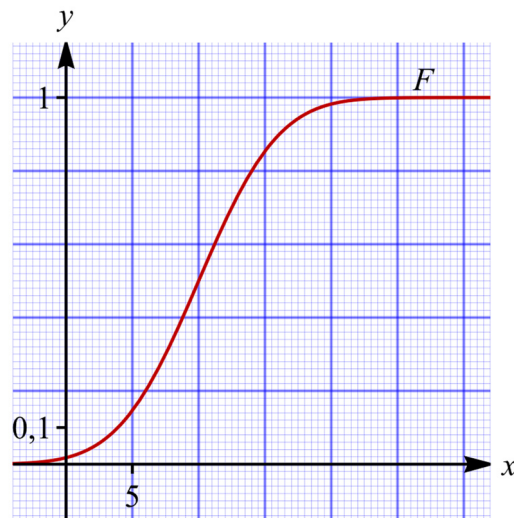
9.D1.21



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

- Bestem tallet  $k$ , så  $P(12 \leq X \leq k) = 0,3$ .  
Brug bilaget.

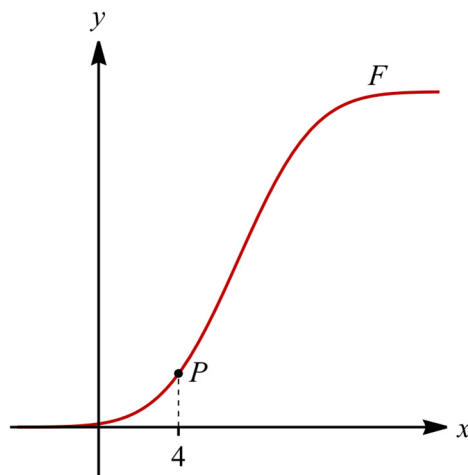
9.D1.22



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

- a) Gør for hver af følgende påstande rede for, om den er korrekt.
- 1) Middelværdien for  $X$  er lig 10.
  - 2) Spredningen for  $X$  er lig 2.

9.D1.23

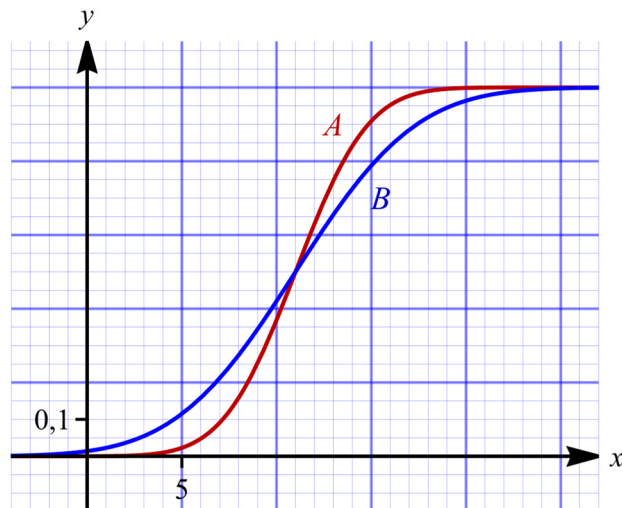


Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 7$  og spredning  $\sigma = 3$ .

Punktet  $P$  ligger på grafen for  $F$ . Se figuren.

- a) Bestem koordinatsættet til punktet  $P$ .

9.D1.24



Figuren viser graferne for fordelingsfunktionerne for to normalfordelinger  $A$  og  $B$ .

a) Gør for hver af følgende påstande rede for, om den er korrekt.

- 1) Normalfordeling  $A$  og normalfordeling  $B$  har samme middelværdi.
- 2) Normalfordeling  $A$  har en større spredning end normalfordeling  $B$ .

Brug bilaget.

9.D1.25

Tæthedsfunktionerne for tre normalfordelte stokastiske variable  $X_1$ ,  $X_2$  og  $X_3$  er givet ved

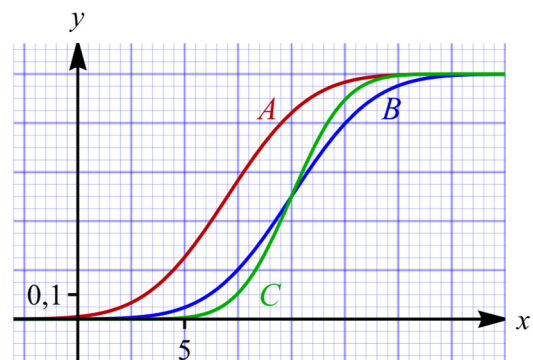
$$X_1: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-7}{3}\right)^2}$$

$$X_2: g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{3}\right)^2}$$

$$X_3: h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{2}\right)^2}$$

På figuren ses graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  for fordelingsfunktionerne for de tre normalfordelte stokastiske variable.

- a) Gør for hver af graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  rede for, hvilken af de stokastiske variable  $X_1$ ,  $X_2$  og  $X_3$  den hører til.



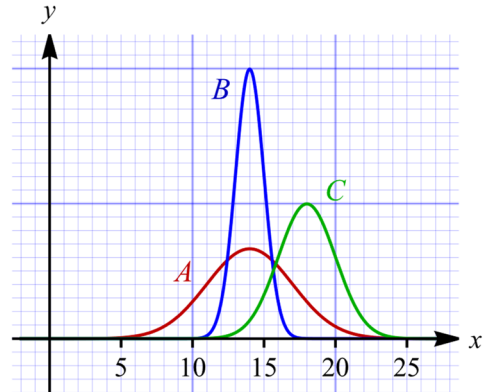
9.D1.26

Tæthedsfunktionerne for tre normalfordelte stokastiske variable er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-14}{3}\right)^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (x-14)^2}$$

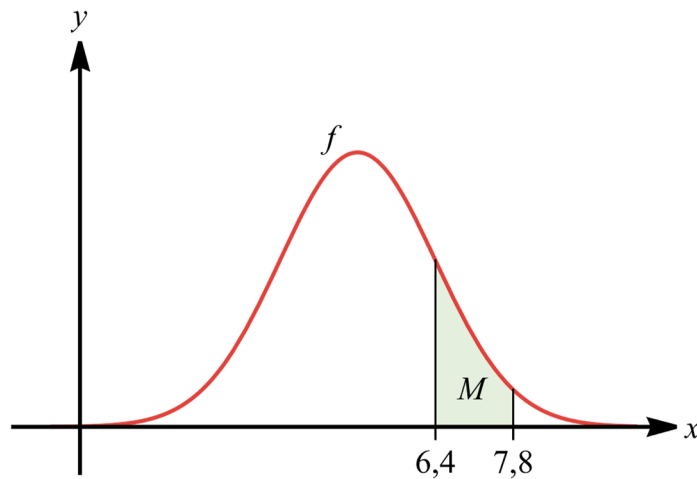
$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-18}{2}\right)^2}$$



På figuren ses graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  for de tre tæthedsfunktioner.

- a) Gør for hver af graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$  rede for, hvilken af tæthedsfunktionerne  $f$ ,  $g$  og  $h$  den hører til.

9.D1.27



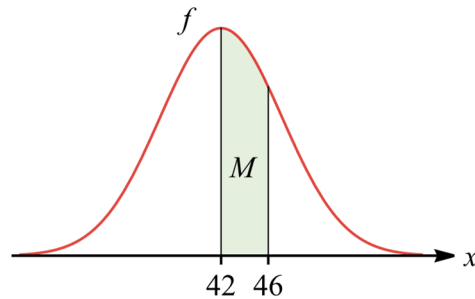
Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen  $f$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 5$  og spredning  $\sigma = 1,4$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen og linjerne med ligningerne  $x = 6,4$  og  $x = 7,8$  et område  $M$ . Se figuren.

- a) Bestem arealet af området  $M$ .



9.D1.28



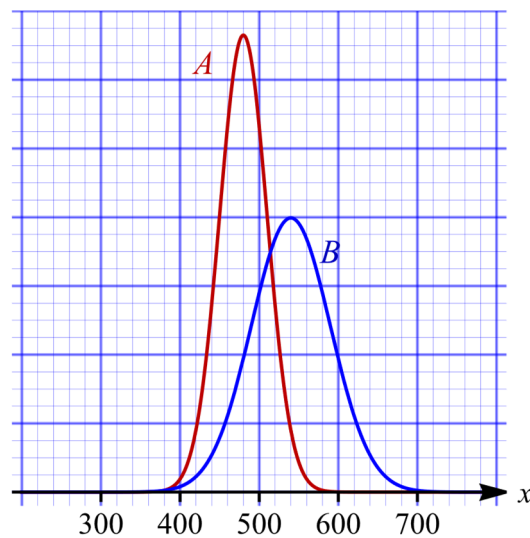
Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen  $f$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi 42.

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med  $x$ -aksen og linjerne med ligningerne  $x = 42$  og  $x = 46$  et område  $M$  med arealet 0,28. Se figuren.

- a) Bestem  $P(X \leq 46)$ .

9.D1.29

En sukkerfabrik har to maskiner  $A$  og  $B$  til pakning af sukker i poser. For begge maskiner antages det, at vægten (målt i gram) af de enkelte poser er normalfordelt. På figuren ses graferne for de to tilhørende tæthedsfunktioner.



- a) Bestem middelværdien for vægten af de poser, der bliver pakket på maskine  $A$ .  
b) Undersøg, om det er poserne fra  $A$  eller  $B$ , der varierer mest i vægt.

9.D1.30

I en model kan batterilevetiden (målt i måneder) for en bestemt type pacemaker beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 92$  og spredning  $\sigma = 7$ .

- a) Bestem  $P(X \leq 85)$ , og forklar, hvad dette tal fortæller om batterilevetiden.

**9.D1.31**

I et bestemt land afholdes hvert år en landsdækkende matematiktest for landets grundskoleelever.

I en model kan elevernes pointtal fra testen beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 76$  og spredning  $\sigma = 7$ .

Lad  $F$  være fordelingsfunktionen for  $X$ .

- a) Bestem  $F(69)$ , og forklar betydningen af dette tal.

**9.D1.32**



Billedkilde: pexels

I en model kan ventetiden (målt i sekunder) ved opkald til en bestemt banks hotline beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

Tæthedsfunktionen for  $X$  betegnes  $f$ .

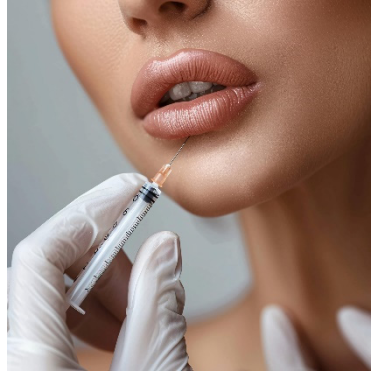
Det oplyses, at  $\int_{60}^{90} f(x) dx = 0,81$ .

- a) Forklar, hvad dette tal fortæller om ventetiden ved opkald til bankens hotline.

## Delprøve 2

- 9.D2.1** Lars har en almindelig 6-sided terning, hvor hver af de 6 sider har samme sandsynlighed.
- Han kaster terningen tre gange.
- a) Er sandsynligheden for, at terningen i første kast viser en 6'er, og at den i de to næste kast ikke viser en 3'er, mindre end 10 %?
- 9.D2.2** I en virksomhed er der 11 personer ansat.  
6 af dem er kvinder, og 5 af dem er mænd.  
Der skal dannes en arbejdsgruppe på 5 personer.
- a) Hvad er sandsynligheden for, at arbejdsgruppen kun består af kvinder?
- 9.D2.3** En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 650$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,17$ .
- a) Bestem middelværdien  $\mu$  og spredning  $\sigma$  af  $X$ .
- 9.D2.4** En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 80$  og sandsynlighedsparameter  $p = \frac{1}{4}$ .
- a) Bestem  $P(15 \leq X \leq 20)$ .
- 9.D2.5** En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 600$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,32$ .
- a) Bestem  $P(X = 180)$ .
- b) Bestem  $P(X > 200)$ .

9.D2.6



Billedkilde: pixabay

I et bestemt land har 0,4 % af alle kvinder fået foretaget en botox-behandling.

I en model betegner den stokastiske variabel  $X$  det antal kvinder, der har fået foretaget en botox-behandling blandt 1000 tilfældigt udvalgte kvindelige indbyggere.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 1000$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,004$ .

- a) Bestem sandsynligheden  $P(X = 10)$ .

9.D2.7



Billedkilde: pixabay

I et bestemt land viste en stor undersøgelse i 2005, at andelen af unge mellem 16 og 19 år, der røg dagligt, var 15 %.

I en model betegner den stokastiske variabel  $X$  antallet af daglige rygere, blandt 1700 tilfældigt udvalgte unge mellem 16 og 19 år.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 1700$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,15$ .

- a) Bestem sandsynligheden  $P(X \leq 250)$ , og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

9.D2.8



Billedkilde: pixabay

I Danmark holder 3 % af befolkningen fisk.

Der udvælges på tilfældig måde en stikprøve på 450 personer.

Den stokastiske variabel  $X$  betegner antallet af personer i denne stikprøve, der holder fisk.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 450$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,03$ .

- Bestem sandsynligheden  $P(X \geq 20)$ , og forklar betydningen af dette tal.
- Hvad er det mest sandsynlige antal personer, der holder fisk, ud af de 450 i stikprøven?

9.D2.9

Et firma, der sælger blomsterløg, oplyser på deres hjemmeside, at 87 % af deres blomsterløg spirer. En kunde køber  $n$  blomsterløg.

Den stokastiske variabel  $X$  betegner antallet af blomsterløg, der spirer.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,87$ .

- Bestem sandsynligheden  $P(X \geq 45)$  for, at mindst 45 blomsterløg spirer, hvis  $n = 50$ .
- Hvor mange blomsterløg skal kunden mindst købe, hvis  $P(X \geq 45)$  skal være større end 95 %?

9.D2.10

En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 6$  og spredning  $\sigma = 1,3$ .

- Bestem tallet  $k$ , så  $P(X \leq k) = 0,4$ .

9.D2.11

En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 9$  og spredning  $\sigma = 2$ .

- Bestem tallet  $k$ , så  $P(9 - k \leq X \leq 9 + k) = 0,5$ .

**9.D2.12** I en model kan levealderen (målt i år) for en bestemt hunderace beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 8,1$  og spredning  $\sigma = 1,6$ .

- a) Bestem  $P(X \geq 9)$ , og forklar, hvad dette tal fortæller om levealderen for hunderacen.

**9.D2.13** I en model kan fødselsvægten (målt i g) for drenge i et bestemt land beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 3174$  og spredning  $\sigma = 671$ .

- a) Bestem sandsynligheden for, at en nyfødt dreng i landet har en fødselsvægt mellem 3000 g og 4000 g.

**9.D2.14** I en model kan vægten (målt i gram) af en bestemt slags citrusfrugt beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 42,1$  og spredning  $\sigma = 5,6$ .

Lad  $F$  betegne fordelingsfunktionen for  $X$ .

- a) Bestem  $F(50)$ , og forklar, hvad tallet fortæller om citrusfrugternes vægt.



Billedkilde: pexels

**9.D2.15**



Billedkilde: pexels

I en model kan træernes højde (målt i meter) i en bestemt nåleskov beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 9,4$  og spredning  $\sigma = 2,7$ .

- a) Bestem  $P(X \leq 6)$ , og forklar, hvad dette tal fortæller om træernes højde i skoven.
- b) Hvor høje er de 10 % højeste træer i skoven?

**9.D2.16** Et firma producerer en bestemt type kraner.  
I en model kan løfteevnen (målt i kg) for disse kraner beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 7350$  og spredning  $\sigma = 160$ .

- a) Bestem sandsynligheden  $P(7200 \leq X \leq 7400)$  for, at en tilfældig af firmaets kraner har en løfteevne mellem 7200 kg og 7400 kg.

Firmaet reklamerer med, at 95 % af deres kraner har en løfteevne på over 7000 kg.

- b) Undersøg, om firmaets kraner lever op til dette.

**9.D2.17** I en model kan den personlige IQ-score for indbyggerne i et bestemt land beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 103,1$  og spredning  $\sigma = 19,4$ .

- a) Bestem sandsynligheden  $P(90 \leq X \leq 110)$  for, at en tilfældig indbygger i landet har en IQ-score mellem 90 og 110.
- b) Bestem tallet  $k$ , så  $P(X \geq k) = 0,01$ , og forklar, hvad dette tal fortæller om IQ-scoren i landet.